

Verschieben

Eine Verschiebevorschrift hat drei Parameter:

- Die Richtung, in die verschoben wird. Eine "Richtung" ist in der Geometrie durch eine Parallelschar (das ist eine Menge zueinander paralleler Geraden) definiert. Jede Parallele der Schar hat dieselbe Richtung. Es gibt in der Ebene unendlich viele Richtungen.
- Die Orientierung, das ist eine Angabe über den Durchlaufsinne der Geraden der Schar beim Verschieben. Es gibt dafür zwei Möglichkeiten, man kann sie mit einer Pfeilspitze kenntlich machen.
- Den Betrag, um den längs der Geraden der Schar verschoben werden soll. Er wird durch eine Streckenlänge angegeben.

Diese drei Parameter von Schiebepfeilen faßt man in Form von Pfeilen zusammen, deren Richtung die Verschieberichtung, deren Pfeilspitze die Orientierung und deren Länge den Betrag kennzeichnen. Sie heißen **Schiebepfeile** (oder **Vektorpfeile**).

DEN SCHIEBEPFEIL KONSTRUIEREN

In zwei gegebenen Punkten A und B ist die gesamte Information über eine Verschiebevorschrift (Richtung, Orientierung und Betrag) enthalten, sofern man nur vereinbart hat, daß A der Anfangspunkt und B der Endpunkt der Verschiebung sein soll. Was allerdings fehlt ist eine optische Information darüber, daß die Punkte A und B eine Schiebepfeil definieren sollen. Der Träger dieser Information ist der Pfeil. Wir haben also zunächst einen Pfeil zu konstruieren und diese Konstruktion in einem Makro festzuhalten. Das machen wir so, wie es in einem beim Cabri Géomètre (unter dem Namen Vektor) mitgelieferten Makro vorgegeben ist:

- (1) Die Strecke [AB] zeichnen ("*Strecke*"), damit sind Richtung und Betrag anschaulich gemacht
- (2) Die Pfeilspitze, die die Orientierung anschaulich macht, so konstruieren:
 - Den Mittelpunkt M1 von [AB], den Mittelpunkt M2 von [M1B], den Mittelpunkt M3 von [M2B] konstruieren (*Option Mittelpunkt*)
 - Die Senkrechte durch M3 auf [AB] oder die Mittelsenkrechte von [M2B] zeichnen (*Option Senkrechte bzw Mittelsenkrechte*)
 - Den Kreis um M3 durch B zeichnen ("*Kreis aus Kreismittelpunkt und Kreispunkt*")
 - Senkrechte und Kreis schneiden ("*Schnitt*")
 - Die beiden Schnittpunkte mit B verbinden ("*Strecke*"). Diese beiden Strecken bilden die Pfeilspitze.

Bei der Definition des Makro muß man bedenken, daß die vollständige Information über die durch den Pfeil signalisierte Verschiebung bereits in den Punkten A und B steckt. Das **Makro Pfeil** lautet demnach:

Eingabeobjekte:	Anfangspunkt A, Endpunkt B
Zielobjekte:	Strecke [AB] und die beiden Strecken der Pfeilspitze

Die drei Parameter Richtung, Orientierung und Betrag lassen sich durch stetiges Verändern des Schiebepfeils variieren:

- Die Richtung wird verändert, indem man A oder B mit der Zughand greift und seitlich (also nicht in Richtung der Strecke [AB]) verzieht
- Der Betrag wird verändert, indem man A oder B in Richtung der Strecke [AB] verzieht
- Die Orientierung wird verändert, indem man den Endpunkt B mit der Zughand greift und längs der Verschieberichtung "auf die andere Seite von A" zieht.

DIE VERSCHIEBEVORSCHRIFT

Vom Schiebepfeil ausgehend können wir jetzt die **Verschiebevorschrift** angeben. Dazu benutzen wir die Punktspiegelvorschrift, die jede Gerade auf eine dazu parallele Gerade abbildet.

(1) Zwei Punkte A und B zeichnen. Zur optischen Information, daß es sich um eine Verschiebevorschrift handelt, einen Pfeil hinzufügen (*Makro Pfeil*)

(2) Einen Ursprung P zeichnen ("*Punkt*")

(3) Den Bildpunkt so konstruieren:

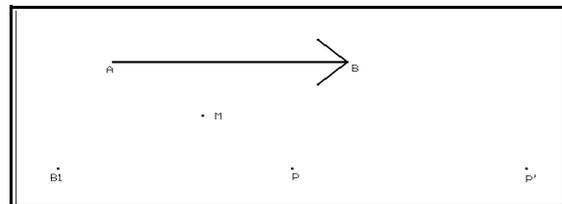
- Den Mittelpunkt von [AP] konstruieren ("*Mittelpunkt*") und M nennen

- Den Punkt B an M spiegeln (*Makro Punktspiegeln*), den Bildpunkt B1 nennen

- Den Punkt B1 an P spiegeln (*Makro Punktspiegeln*), den Bildpunkt P' nennen.

P' ist der Bildpunkt von P bei der durch die Punkte A, B (den Pfeil) definierten Verschiebung

Diese Konstruktion mit den Eingabeobjekten A, B, P und dem Zielobjekt P' wollen wir uns unter dem Namen **Vier-Punkte-Konstruktion** merken.



Länge, Richtung und Orientierung des Schiebepfeils variieren (B greifen). Dabei auch den Ursprung P greifen und auf der Ebene wandern lassen. Außerdem soll geprüft werden, ob die Vorschrift unabhängig davon ist, an welcher Stelle der Schiebepfeil gezeichnet wurde.

Dazu konstruieren wir den Pfeil so, daß er nach Richtung, Länge, Orientierung und Lage frei variierbar ist:

- Eine Strecke v zeichnen, die den Betrag der Verschiebung angibt ("*Strecke*")
 - Eine Gerade zeichnen, die die Richtung der Verschiebung angibt ("*Gerade*")
 - Einen Punkt A und einen Richtungspunkt R auf die Gerade legen ("*Punkt auf Objekt*")
 - Die Strecke v von A aus in Richtung R abtragen (*Makro Streckenübertragung*), Endpunkt B
- Den Pfeil von A nach B zeichnen. (*Makro Pfeil*)

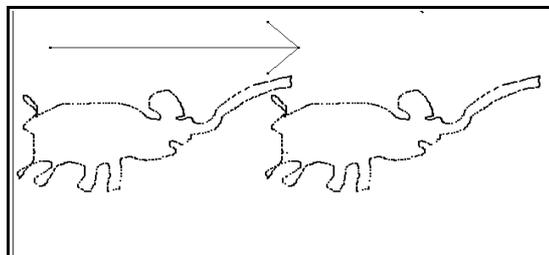
Einen Punkt P mit diesem Pfeil verschieben (Bildpunkt P') und die Parameter variieren: Einen Endpunkt der Strecke v greifen und die Pfeillänge verändern. Die Gerade greifen und parallel verschieben. Den Richtungspunkt R greifen und "auf die andere Seite von A" ziehen. Die Objektbindung von R an die Gerade lösen ("*Verbindung aufheben*") und den Pfeil in beliebige Richtung zeigen lassen.

Das zugehörige **Makro Verschieben** lautet:

Eingabeobjekte:	Punkt A, Punkt B, Punkt P
Zielobjekt:	Punkt P'

Hier wird noch einmal deutlich, daß zum Verschieben nicht der Pfeil, sondern nur die Punkte A und B gegeben sein müssen. Der Pfeil dient lediglich zur optischen Information.

Mit dem Makro können wir auch wieder freihandzeichnen (Schiebepfeil zeichnen, Ursprung P abbilden, Option Ortslinie aufrufen, Shift-Taste drücken, Ur- und Bildpunkt anklicken, Ursprung greifen und mit dem Zeichnen beginnen.



Diese Vorschrift ist die Standardvorschrift einer Abbildung, die **Verschiebung** heißt.

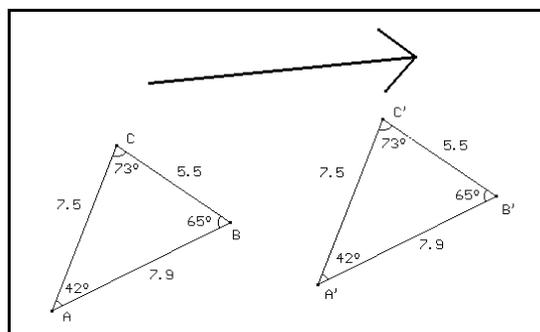
VERSCHIEBEN IST EINE KONGRUENZVORSCHRIFT

- Wir lassen den Ursprung P auf der ganzen Zeichenebene wandern. Zu jedem Ursprung gibt es auf der Zeichenebene immer einen Bildpunkt. Die Verschiebevorschrift bildet die Zeichenebene auf sich ab. Außerdem sehen wir: Die Verschiebevorschrift hat keine Fixpunkte.

- Wir verschieben ein Dreieck (die Eckpunkte einzeln verschieben und auf die Bildpunkte der Ecken die Option DREIECK anwenden) und definieren damit das **Makro Verschieben-Dreieck:**

Eingabeobjekte:	Anfangs- und Endpunkt des Schiebepfeils, Urdreieck
Zielobjekt:	Bilddreieck

Wir messen Seiten und Eckenwinkel, variieren den Schiebepfeil (Betrag, Richtung und Orientierung) und das Urdreieck und beobachten dabei: Ur- und Bildgeraden sind stets gleichlang, Ur- und Bildwinkel sind stets gleichgroß, Ur- und Bilddreiecke sind deshalb stets kongruent.



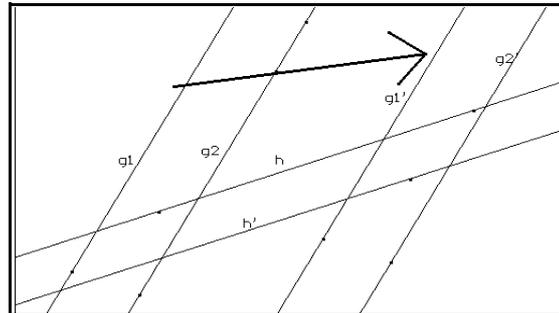
Die Verschiebevorschrift ist längentreu und winkeltreu, sie bildet Dreiecke auf

kongruente Dreiecke ab. Die Verschiebevorschrift ist eine **Kongruenzvorschrift.**

- Jetzt verschieben wir eine Gerade (zwei Punkte der Gerade verschieben und durch die Bildpunkte eine Gerade zeichnen) und entwickeln daraus das **Makro Verschieben-Gerade:**

Eingabeobjekte:	Anfangs- und Endpunkt des Schiebepfeils, zwei Punkte der Urgeraden g
Zielobjekte:	Bildgerade g'

Eine "Gerade durch 2 Punkte" g_1 zeichnen, mit einer dazu parallelen Geraden g_2 einen Streifen zeichnen, eine "Gerade" h zeichnen. Alle Geraden mit dem gegebenen Schiebepfeil verschieben. Dann Gerade g_1 drehen, Geraden g_2 und h parallel verschieben. Dabei beobachten wir:



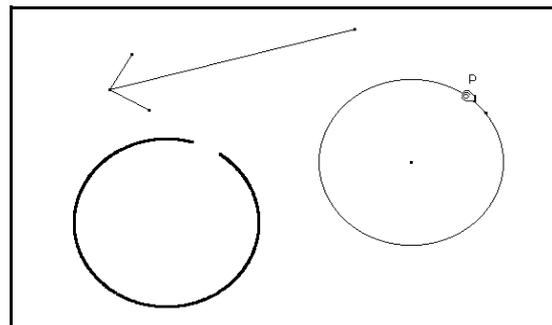
Jede Bildgerade ist parallel zu ihrer Urgeraden

Jeder Streifen wird wieder auf einen (sogar dazu parallelen) Streifen abgebildet

Jede Gerade in Verschieberichtung ist eine Fixgerade.

Die erste dieser drei Eigenschaften haben wir schon beim Punktspiegeln kennengelernt und perspektiv genannt. Punktspiegelung und Verschiebung sind übrigens die einzigen Abbildungen mit dieser wichtigen Eigenschaft.

- Mit der zweischrittigen Ortslinien-Strategie stellen wir fest: **Verschieben ist kreistreu.** Außerdem beobachten wir beim Entstehen des Bildkreises: **Verschieben ist orientierungstreu.**
- Jetzt fehlt nur das **Makro Verschieben-Kreis:**



Eingabeobjekte:	Anfangs- und Endpunkt des Schiebepfeils, der Mittelpunkt und ein Kreispunkt des Urkreises k
Zielobjekte:	Bildkreis k'

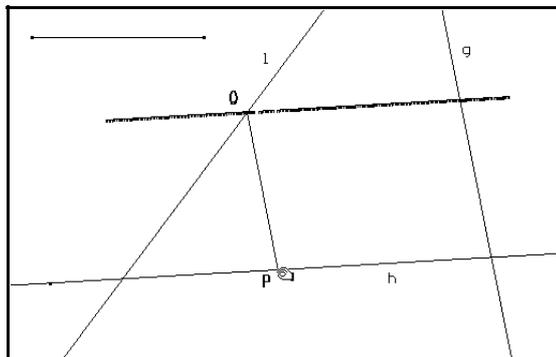
EINE AUFGABENFAMILIE

Die Grundaufgabe: Zeichne drei Geraden g , h und l . Konstruiere alle Strecken gegebener Länge s parallel zu g , deren Endpunkte P auf h und Q auf l liegen.

Lösungsstrategie: Es handelt sich wieder um eine Inzidenzaufgabe. Dazu lassen wir eine der drei Bedingungen der Aufgabe, nämlich daß Q auf l liegen müsse, weg und konstruieren die Ortslinie der Punkte Q , wenn P auf h wandert.

Die Konstruktionsvorschrift dazu lautet:

- (1) Die Geraden g , h und l ("Gerade") zeichnen
- (2) Eine Strecke der Länge s zeichnen ("Strecke")
- (3) Eine Strecke $[PQ]$ so konstruieren
 - Einen Punkt P an beliebiger Stelle auf h legen ("Punkt auf Objekt")
 - Die Parallele durch P zu g zeichnen ("Parallele")
 - Einen Richtungspunkt R auf die Parallele legen ("Punkt auf Objekt"), die gegebene Strecke von P aus in Richtung R übertragen (*Makro Streckenübertragung*), den Endpunkt Q nennen. Parallele und Richtungspunkt ausradieren.
- (4) Die Option ORTSLINIE aufrufen, Q anklicken, P greifen und auf h wandern lassen.

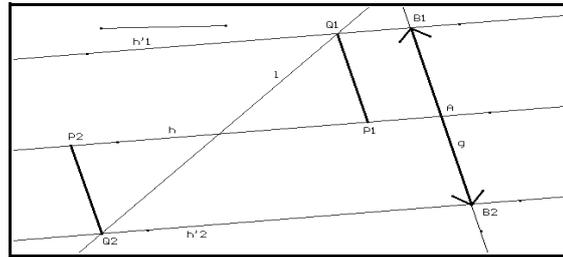


In Bezug auf P ist der Punkt Q der Bildpunkt einer Verschiebung in Richtung g um den Betrag s . Die Ortslinie von Q ist also die Bildgerade h' von h bei dieser Verschiebung. Der Punkt Q ist demnach der Schnittpunkt der Bildgeraden h' mit der Geraden l . Den Punkt P erhält man dann durch Verschieben von Q mit der Umkehrabbildung (Umkehrpfeil!). Es gibt zwei Lösungs-Strecken entsprechend den beiden möglichen Orientierungen des Schiebepfeils.

Aus der Lösungsstrategie ergibt sich die Konstruktionsvorschrift:

- (1) Die Geraden g , h ("Gerade") und l ("Gerade durch 2 Punkte") zeichnen
- (2) Eine Strecke gegebener Länge s zeichnen ("Strecke")
- (3) Die beiden Schiebepfeile so konstruieren:
 - Die Geraden g und h schneiden ("Schnitt"), den Schnittpunkt A nennen
 - Auf g von A aus in beiden Richtungen Richtungspunkte R_1 und R_2 legen ("Punkt auf Objekt"),
 - von A aus in Richtung R_1 und R_2 die gegebene Strecke der Länge s übertragen (*Makro Streckenübertragung*), die Endpunkte Q_1 und Q_2 nennen
 - Zur Verdeutlichung: Schiebepfeile von A nach B_1 und nach B_2 zeichnen (*Makro Pfeil*)
- (4) Die Lösungs-Strecken so konstruieren:
 - Gerade h mit beiden Schiebepfeilen verschieben (*Makro Verschieben-Gerade*), die Bildgeraden h'_1 und h'_2 nennen
 - Geraden h'_1 und h'_2 mit der Geraden l schneiden ("Schnitt"), die Schnittpunkte Q_1 und Q_2 nennen
 - Punkte Q_1 und Q_2 mit der Umkehrabbildung (Umkehrpfeil!) abbilden (*Makro Verschieben*), die Bildpunkte P_1 und P_2 nennen
 - Die Strecken $[P_1Q_1]$ und $[P_2Q_2]$ zeichnen. Sie sind die gesuchten Lösungs-Strecken.

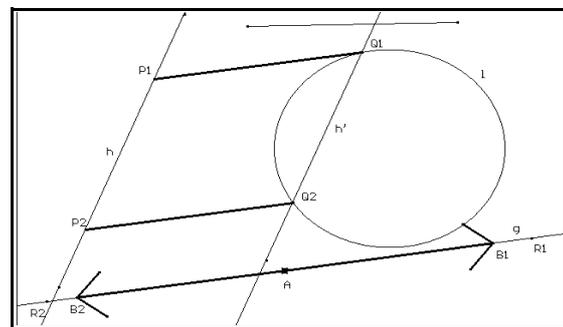
Zur **Fallunterscheidung** drehen wir die Gerade l , variieren die Länge s und finden:
 Sind h und l nicht parallel, so gibt es stets 2 Lösungen.
 Sind h und l parallel, so gibt es für $h' \neq l$ keine, für $h' = l$ beliebig viele Lösungen.



Die erste Variation der Grundaufgabe: Die Gerade l wird durch einen Kreis l ersetzt.

Zur Konstruktion: Der Punkt A ist beliebig auf der Geraden g wählbar; von ihm aus werden Pfeile nach beiden Seiten angetragen. (In dem hier abgebildeten Beispiel muß dann nur nach einer Seite geschoben werden.)

Zur **Fallunterscheidung** verschieben wir die Gerade h , variieren die Länge s und stellen fest: Es gibt 4, 3, 2, 1 oder keine Lösung je nachdem, ob die Geraden $h'1$ und/oder $h'2$ den Kreis l schneiden, berühren oder meiden.

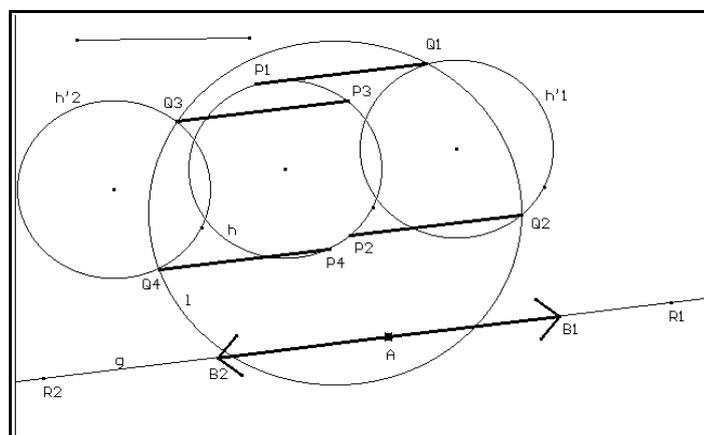


Die zweite Variation der Grundaufgabe: Die Geraden h und l werden beide durch Kreise ersetzt, die wir wieder h ("Kreis") und l ("Kreis aus Kreismittelpunkt und Kreispunkt") nennen.

Zur Konstruktion: Liegt der Kreis h im Äußeren des Kreises l , so braucht er nur auf eine Seite verschoben zu werden; liegt er im Inneren, so wird er nach beiden Seiten (entsprechend den beiden Schiebepfeilen) verschoben.

Zur **Fallunterscheidung**: Den Kreis h (Mittelpunkt und Kreispunkt) stetig verändern, den Kreis l verschieben.

Man erkennt: Es gibt 4, 3, 2, 1 oder keine Lösung je nachdem, ob die Kreise $h'1$ und/oder $h'2$ den Kreis l schneiden, berühren oder meiden.



EINE AUFGABE FÜR EIN ZU KLEINES ZEICHENBLATT

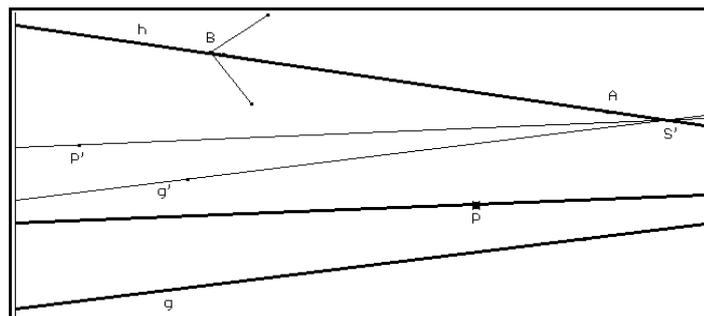
Gegeben sind die Geraden g und h , die sich außerhalb des Zeichenblattes schneiden, und ein Punkt P . Gesucht ist die Gerade durch P und den Schnittpunkt von g und h .

Lösungsstrategie: Die gegebene Figur wird mit einem in Richtung h angetragenen Schiebepfeil so weit verschoben, daß sich die Geraden g' und h (h ist Fixgerade!) auf dem Zeichenpapier schneiden. Der Punkt P hat bei dieser Verschiebung den Bildpunkt P' . Die Gerade durch P' und den Schnittpunkt von g' und h wird gezeichnet. Zuletzt wird die Figur mit der Umkehrabbildung (umgekehrter Schiebepfeil) zurück verschoben.

Damit lautet die Konstruktionsvorschrift:

- (1) Gerade g ("Gerade durch 2 Punkte"), Gerade h ("Gerade") und Punkt P ("Punkt") zeichnen
- (2) Den Schiebepfeil so konstruieren:
 - Punkte A und B auf h legen ("Punkt auf Objekt")
 - Zur Verdeutlichung den Schiebepfeil von A nach B zeichnen (Makro Pfeil)
- (3) Die Figur wird so verschoben:
 - Gerade g mit dem Schiebepfeil verschieben (Makro Verschieben-Gerade), die Bildgerade g' nennen
 - Den Schiebepfeil gegebenenfalls so verlängern (Punkt B mit der Zughand greifen), daß sich g' und h auf dem Zeichenblatt schneiden
 - Den Punkt P mit demselben Schiebepfeil verschieben (Makro Verschieben), den Bildpunkt P' nennen
 - Die Geraden g' und h schneiden ("Schnitt"), den Schnittpunkt S' nennen
- (4) Die gesuchte Gerade so konstruieren:
 - Die Gerade durch P' und S' zeichnen ("Gerade durch 2 Punkte")
 - Diese Gerade mit der Umkehrabbildung (umgekehrter Schiebepfeil) abbilden (Makro Verschieben-Gerade), die Bildgerade geht durch den Punkt P und den Schnittpunkt von g und h .

Den Punkt P mit der Zughand greifen und in der gesamten Zeichenebene variieren. Auch die Parameter variieren: Die Gerade g drehen und die Gerade h verschieben.



BANDORNAMENTE

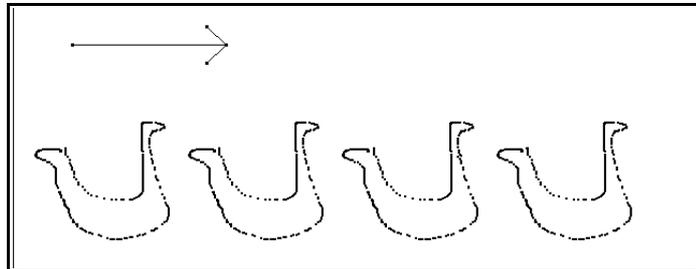
Es gibt 7 Typen von

Bandornamenten, von denen 5 Typen jetzt gezeichnet werden können. (Für die beiden letzten benötigt man die Schubspiegelvorschrift.)

Dabei kann man das Ornament aus Dreiecken aufbauen, man kann aber auch freihandzeichnen (Die Option ORTSLINIE aufrufen, die Shift-Taste drücken und den Ursprung und alle Bildpunkte nacheinander anklicken, den Ursprung greifen und mit den Zeichen beginnen).

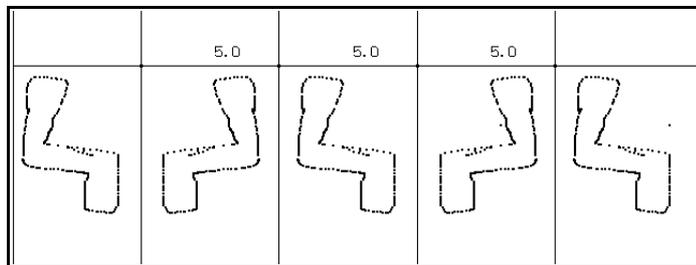
1. Ornament: Es ist **schubsymmetrisch**

Einen Schiebepfeil zeichnen, einen Ursprung zeichnen, den Ursprung mit dem Schiebepfeil verschieben (*Makro Verschieben*), dann mehrmals nacheinander Folgendes durchführen: den Bildpunkt als Ursprung auffassen und mit dem Schiebepfeil verschieben.



2. Ornament: Es ist **querachsensymmetrisch**

Eine Gerade zeichnen, Punkte darauflegen ("Punkt auf Objekt"), die Punkte mit Strecken verbinden, die Strecken messen, die Punkte so verschieben, daß sie alle denselben Abstand haben, durch die Punkte Senkrechte zur Geraden zeichnen.

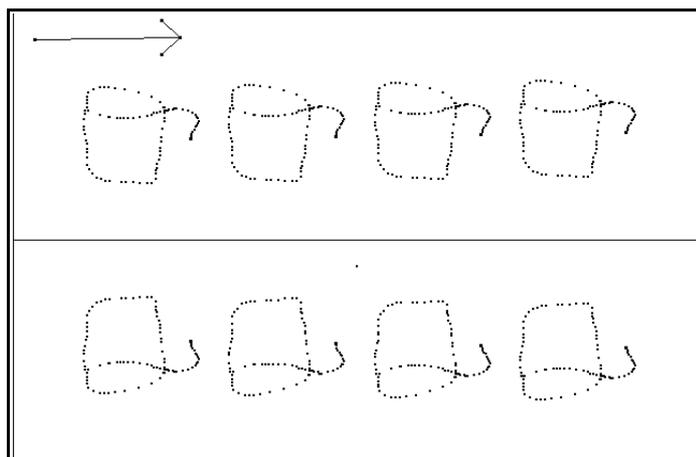


Einen Ursprung zeichnen, den Ursprung an der ersten Geraden spiegeln (*Makro Geradenspiegeln*), dann mehrmals nacheinander Folgendes durchführen: den Bildpunkt als Ursprung auffassen und an der nächsten Geraden spiegeln.

3. Ornament: Es ist **schubsymmetrisch und längsachsensymmetrisch**

Einen Schiebepfeil und dazu parallel eine Gerade zeichnen. Einen Ursprung zeichnen, den Ursprung mit dem Schiebepfeil (wie beim 1. Ornament) mehrmals abbilden, den Ursprung auch an der Geraden spiegeln und den Spiegelpunkt mit dem Schiebepfeil (wie beim 1. Ornament) mehrmals abbilden.

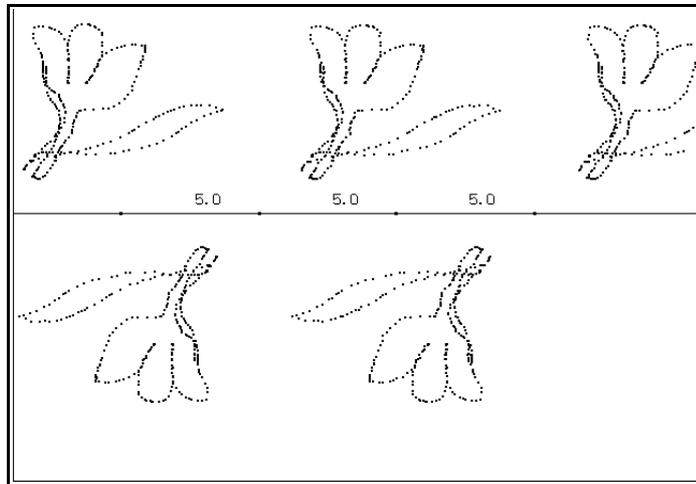
Statt den Spiegelpunkt mit dem Schiebepfeil abzubilden, kann man auch alle vom Ursprung aus durch Verschieben gewonnenen Punkte einzeln an der Geraden spiegeln.



4. Ornament: Es ist **schubsymmetrisch und punktsymmetrisch**

Eine Gerade zeichnen, Punkte darauflegen (*Punkt auf Objekt*), die Punkte mit Strecken verbinden, die Strecken messen, die Punkte (Spiegelpunkte) so verschieben, daß sie alle den gleichen Abstand voneinander haben.

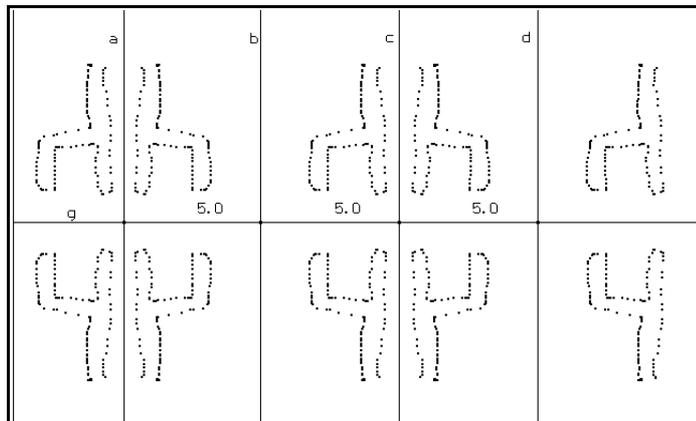
Einen Ursprung zeichnen, den Ursprung am ersten Spiegelpunkt spiegeln, dann mehrmals nacheinander Folgendes durchführen: den Bildpunkt als Ursprung auffassen und am nächsten Spiegelpunkt spiegeln.



5. Ornament: Es ist **schubsymmetrisch, querachsensymmetrisch, längsachsensymmetrisch und punktsymmetrisch**

Eine Gerade (Längsachse) zeichnen, Punkte darauflegen (*Punkt auf Objekt*), die Punkte mit Strecken verbinden, die Strecken messen, die Punkte (Spiegelpunkte) so verschieben, daß sie alle den gleichen Abstand voneinander haben, in diesen Punkten Senkrechte (Querachsen) auf die Gerade zeichnen.

Einen Ursprung zeichnen, den Ursprung an der ersten Querachse spiegeln, dann mehrmals nacheinander Folgendes durchführen: den Bildpunkt als Ursprung auffassen und an der nächsten Querachse spiegeln. Dann den Ursprung



an der Längsachse spiegeln und anschließend mehrmals nacheinander Folgendes durchführen: den Bildpunkt als Ursprung auffassen und an der nächsten Querachse spiegeln.

Die Punktsymmetrie ist damit (wegen der Gruppeneigenschaft der vier Deckabbildungen) ebenfalls gegeben, doch kann man sie auch zum Konstruieren der Bildpunkte heranziehen.