Spiegeln an einer Geraden

Die Spiegelvorschrift

An einer Geraden kann man mit dem Geodreieck oder auch mit Zirkel und Lineal spiegeln. Der Cabri Géomètre konstruiert den Spiegelpunkt mit Zirkel und Lineal. Wir führen am Bildschirm die Schritte der **Spiegelvorschrift** nacheinander aus:

(1) Die Spiegelgerade a zeichnen *("Gerade")*

(2) Einen **Urpunkt** P zeichnen *("Punkt")*

(3) Den **Bildpunkt** so konstruieren:

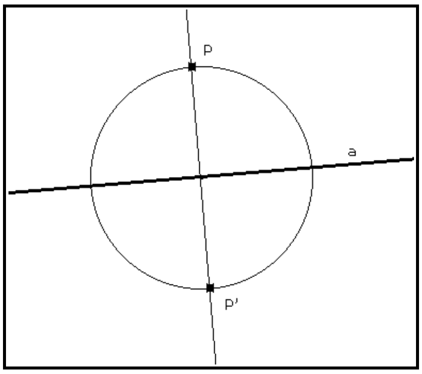
- Durch P die Senkrechte zu a zeichnen *("Lot/Senkrechte")*
- Die Senkrechte mit der Spiegelgeraden schneiden *("Schnitt")*
- Den Kreis um diesen Schnittpunkt durch P zeichnen *("Kreis aus Mittelpunkt und Kreispunkt")*
- Die Senkrechte mit dem Kreis schneiden *("Schnitt")*

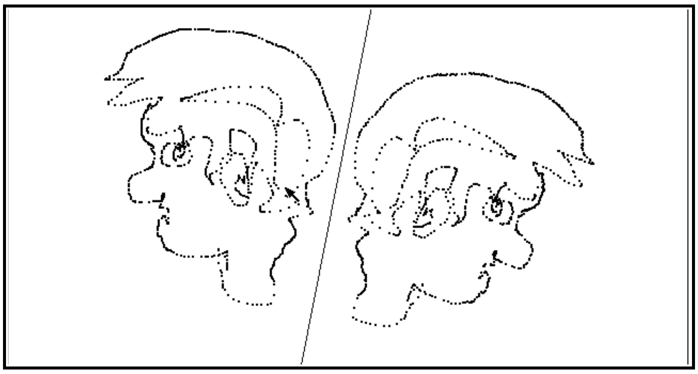
(4) Der eine Schnittpunkt ist P. Den anderen nennen wir P', er ist der Bildpunkt von P.

Den Urpunkt P mit der Zughand greifen und auf der Zeichenebene frei variieren, dabei den Bildpunkt beobachten. Wir können auch freihandzeichnen:

(5) Senkrechte und Kreis ausradieren *("Radiergummi")*

Die Option ORTSLINIE aufrufen, die Shift-Taste drücken und Urpunkt und Bildpunkt anklicken, den Urpunkt mit der Zughand greifen und auf der Zeichenebene frei wandern lassen. Wir erhalten eine **Urfigur** und ihre **Bildfigur**, beide zusammen bilden eine **achsensymmetrische Figur.**





Eine solche Folge von Handlungsanweisungen nennt man eine **Abbildungsvorschrift**. Sie gliedert sich in drei Abschnitte, wie wir am Beispiel der Spiegelvorschrift erkennen können:

- In den Anweisungen (1) und (2) sind die **Eingabeobjekte** aufgeführt, und zwar in (1) der/die Parameter und in (2) die Funktionsvariable.
- In der Anweisung (3) sind die **Konstruktionsschritte** genannt, die von der Eingabe zum Ziel führen.
- In der Anweisung (4) schließlich wird das **Zielobjekt** gekennzeichnet.

Sprachlich kann man die drei Schritte dadurch unterscheiden, daß die Eingabeobjekte **gezeichnet**, die von der Eingabe zum Ziel führenden Schritte **konstruiert** und das Zielobjekt **markiert** werden. Zeichne-Konstruiere-Markiere entspricht in der Algebra dem Dreischritt Eingabe-Vermittlung-Ausgabe, kurz EVA genannt.

Um uns die Gliederung der Abbildungsvorschrift einzuprägen, lassen wir uns die einzelnen Schritte noch einmal am Bildschirm zeigen ("Rückblende").

Zuletzt speichern wir die Spiegelvorschrift als **Makro** **<u>Geradenspiegeln:</u>**

Eingabeobjekte:	Spiegelgerade a, Urpunkt P (in dieser Reihenfolge, also zuerst den Parameter a und dann den variablen Punkt P anklicken)
Zielobjekt:	Bildpunkt P'

Bei Makros werden die von den Eingabeobjekten zum Zielobjekt führenden Konstruktionsschritte von selbst "ausradiert" (unsichtbar gemacht). Verwendet man das eben definierte Makro, so braucht man also Senkrechte und Kreis nicht eigens auszuradieren. (Es ist auch als Makro KONSTRUKTION/SYMMETRISCHER PUNKT vorhanden.)

EIGENSCHAFTEN DER SPIEGELVORSCHRIFT

Den Urpunkt P greifen und auf der ganzen Zeichenebene (Bildschirm) wandern lassen.

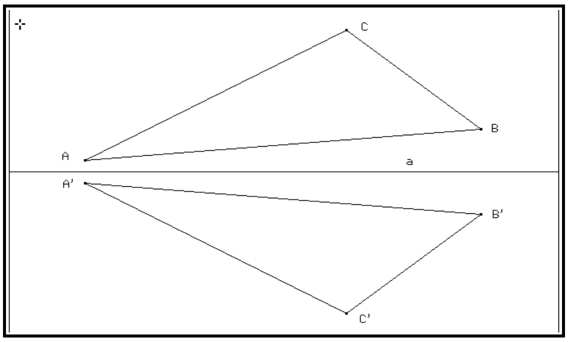
- Auch P' wandert auf der ganzen Zeichenebene. <u>Die Spiegelvorschrift bildet die Zeichenebene auf sich ab.</u>
- Liegt P auf a, so ist P'=P, P ist ein **<u>Fixpunkt</u>**. <u>Die Spiegelgerade ist eine **Fixpunktgerade**.</u>
  Das Makro Geradenspiegeln ist auch auf Punkte P anwendbar, die auf a liegen *("Punkt auf Objekt")*. Hebt man dann die Verbindung von P mit a auf *("Verbindung aufheben"* zunächst *"mehrdeutig",* da P'=P ist. Den auf dem Bildschirm erstgenannten Punkt P anklicken und damit Mehrdeutigkeit beseitigen), so kann man P mit der Zughand von a fortbewegen und damit P und P' auseinanderziehen.
  Umgekehrt: P in die Nähe von a ziehen, dann *"Objektbindung eines Punktes".* P legt sich auf a und zieht P' mit. Es ist P'=P, P ist ein Fixpunkt.
- Wandert P an die Stelle von P', so wandert P' an die Stelle von P. <u>Die Spiegelvorschrift ist **wechselseitig.**</u>

EIN DREIECK SPIEGELN

Jetzt soll ein Dreieck an einer Geraden gespiegelt werden. Dabei können wir auch den Gebrauch unseres Handwerkszeugs üben. Zunächst die Abbildungsvorschrift:

(1) Eine Spiegelgerade a zeichnen *("Gerade")*
(2) Ein **Urdreieck** ABC zeichnen *("Dreieck")*
(3) Die Ecken des **Bilddreiecks** konstruieren:
    Die Eckpunkte A,B,C des Urdreiecks einzeln nacheinander spiegeln *(Makro Geradenspiegeln)*,
    die Bildpunkte A', B', C' nennen
(4) Das Dreieck A'B'C' markieren *("Dreieck")*. Es ist das gesuchte Bilddreieck.

Würde man wie gewohnt die drei Bildpunkte A',B',C' durch Strecken zu einem Dreieck verbinden, so erhielte man zwar den optischen Eindruck eines Dreiecks, aber kein definiertes "Dreieck", das der Cabri Géomètre später als solches wiedererkennen würde. Dies erhält man nur, indem man den Menüpunkt "Dreieck" aufruft und die drei Bildpunkte nacheinander anklickt. (Entsprechend mußte auch bei der Spiegelvorschrift der Schnittpunkt von Senkrechter und Kreis eigens als "Schnitt" definiert werden, um vom Cabri Géomètre wieder als solcher erkannt werden zu können. Der optische Eindruck reicht auch hier nicht aus.)



Wir speichern diese Vorschrift als **Makro <u>Geradenspiegeln-Dreieck:</u>**

Eingabeobjekte: Spiegelgerade a, Urdreieck ABC (in dieser Reihenfolge)
Zielobjekt: Bilddreieck A'B'C'

Das Makro Geradenspiegeln-Dreieck ist also ein *Makro eines Makros*. Makros haben, wie hier deutlich wird, eine <u>Entlastungsfunktion</u>. Umgekehrt sollen auch nur solche Konstruktionen als Makros definiert werden, die entlastend wirken.

Die Eckpunkte A,B,C des Urdreiecks mit der Zughand greifen und das Dreieck variieren, dabei Ur- und Bilddreieck beobachten. Es lassen sich mehrere Fälle unterscheiden:

- spitzwinkeliges/rechtwinkeliges/stumpfwinkeliges Dreieck,
- gleichschenkeliges/gleichseitiges Dreieck,
- alle/nicht alle Eckpunkte eines Dreiecks liegen auf derselben Seite der Spiegelgeraden,
- nichtausgeartetes/ausgeartetes Dreieck.

<u>Achsensymmetrische Vierecke konstruieren</u>

Erste Möglichkeit: ***Diagonalsymmetrische Vierecke***

(1) Eine Spiegelgerade a zeichnen.
(2) Zwei Punkte Q und R auf a und einen Punkt P, der nicht auf a liegt, zeichnen.
(3) P spiegeln ergibt den Bildpunkt P' *(Makro Geradenspiegeln).*
(4) P, Q, P' und R mit Strecken zu einem Viereck verbinden.

P mit der Zughand greifen und auf der Zeichenebene (Bildschirm) wandern lassen. Man erhält *<u>Drachen,</u> <u>Rauten,</u> <u>Quadrat,</u> <u>konkave Vierecke.</u>*

Zweite Möglichkeit: ***Seitenmittensymmetrische Vierecke***

(1) Eine Spiegelgerade a zeichnen.
(2) Zwei Punkte P uns Q zeichnen, die nicht auf a liegen *(Makro Geradenspiegeln).*
(3) P und Q spiegeln ergeben die Bildpunkte P' und Q`.
(4) P, Q, P' und Q' mit Strecken zu einem Viereck verbinden.

P mit der Zughand greifen und auf der Zeichenebene (Bildschirm) wandern lassen. Man erhält *gleichseitige Trapeze, Rechtecke, Quadrat, überschlagene Vierecke.* Als ausgeartete Sonderfälle erhält man *gleichschenkelige (insbesondere gleichseitige) Dreiecke.*

Den Parameter "Spiegelgerade" variieren

Wir haben unsere Konstruktionen bisher stets damit begonnen, eine zwar beliebige, aber letztlich doch bestimmte Spiegelgerade a zu zeichnen. Jetzt soll der Parameter "Spiegelgerade" variiert werden. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten: die Gerade parallel zu verschieben oder sie zu drehen. Im ersten Fall muß man sie als "Gerade", im zweiten als "Gerade durch 2 Punkte" zeichnen.

1. Möglichkeit: *Die Spiegelgerade parallel verschieben*

(1) Eine Spiegelgerade a zeichnen *("Gerade").*
(2) Einen Urpunkt P zeichnen und den Bildpunkt P' konstruieren *(Makro Geradenspiegeln)*
(3) Die Option ORTSLINIE aufrufen, P' anklicken, a mit der Zughand greifen und parallel verschieben.

Wir beobachten: P' bewegt sich auf der Senkrechten zu a durch P.

2. Möglichkeit: *Die Spiegelgerade drehen*

(1) Eine Spiegelgerade a zeichnen *("Gerade durch 2 Punkte" A und B)*
(2) Einen Urpunkt P zeichnen und den Bildpunkt P' konstruieren. *(Makro Geradenspiegeln)*
(3) Die Option ORTSLINIE aufrufen, P' anklicken, einen der beiden definierenden Punkte der Spiegelgeraden (z.B. A) mit der Zughand greifen und die Gerade um den anderen definierenden Punkt (B) drehen.

Wir beobachten: P' bewegt sich auf dem Kreis um B durch A.

Geraden an einer Geraden spiegeln

Es sollen Geraden an einer Geraden gespiegelt werden. Gefragt ist nach Gestalt und Lage der Bildfiguren. Die Option "Ortslinie" hilft uns dabei. In diesem Zusammenhang entwickeln wir ein 2-Schritt-Verfahren, das wir auch später als Ortslinien-Strategie einsetzen können:

(1) Eine Spiegelgerade a zeichnen *("Gerade")*
(2) Eine **Urgerade** g zeichnen
(3) 1. Schritt: Das Bild der Geraden g als Ortslinie so markieren:
- Einen Punkt P auf g legen *("Punkt auf Objekt")*
- P an a spiegeln *(Makro Geradenspiegeln)*, den Bildpunkt P' nennen
- Die Option ORTSLINIE wählen, P mit der Zughand greifen und auf g wandern lassen. Die Ortslinie von P' ist das Bild von g. (Mit dieser Ortslinie kann man beim Cabri Géomètre nicht weiterarbeiten, man kann sie nur löschen. Deshalb benötigt man im allgemeinen einen weiteren Schritt.)

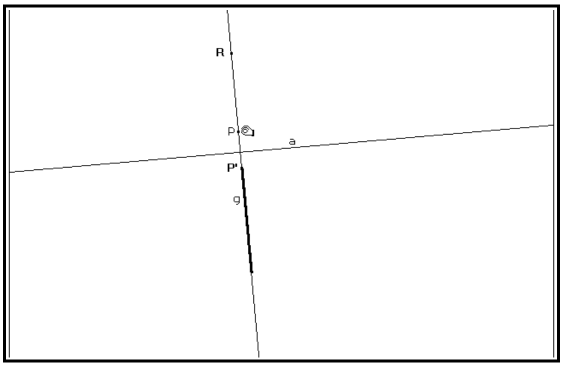
(4) 2. Schritt: Die Ortslinie so identifizieren:
- An Hand der Ortslinie eine Vermutung über Gestalt und/oder Lage der Bildfigur formulieren
- Die Ortslinie löschen
- Die vermutete Linie konstruieren
- Die Option ORTSLINIE noch einmal aufrufen, den Punkt P noch einmal auf der Geraden g wandern lassen und dabei die Ortslinie von P' noch einmal markieren
- Prüfen, ob sich die konstruierte Linie mit der markierten Ortslinie deckt

- Wenn sich beide Linien decken: Eine Aussage über die Bildfigur formulieren.

Diese Strategie läßt sich am Beispiel zu spiegelnder Geraden besonders gut entwickeln, wenn man vor dem allgemeinen Fall die Sonderfälle g^a und g||a betrachtet. Im ersten dieser Sonderfälle nämlich reicht der 1. Strategie-Schritt aus, erst im zweiten Fall wird auch der 2. Schritt benötigt, so daß beide Schritte unabhängig voneinander motiviert sind. In den folgenden Abbildungen ist nur der 1. Strategie-Schritt (Ortslinie markieren) gezeigt.

1. Fall: **g ist senkrecht zu a**

(g durch einen Punkt R senkrecht zu a)



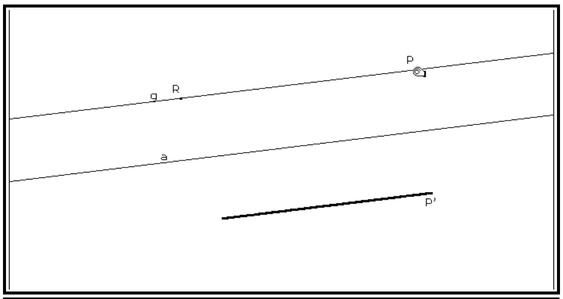
Wir beobachten: Wandert P auf g, so wandert P' ebenfalls auf g. Die Gerade g wird beim Spiegeln als Ganzes (jedoch nicht punktweise) auf sich selbst abgebildet. Ein und dieselbe Gerade ist Ur- und **Bildgerade** zugleich, es ist g'=g. g ist eine **Fixgerade**.

Den Vorgang mit anderen Senkrechten zu a wiederholen. Man erhält sie, wenn man den Punkt R mit der Zughand greift und seitlich zieht, dabei wird die Gerade g parallel verschoben.

Jede Senkrechte zur Spiegelgerade ist eine Fixgerade.

2. Fall: **g ist parallel zu a**

(g durch einen Punkt R parallel zu a)



Wir beobachten: Wandert P auf g, so wandert P' auf der Parallelen zu a, die von a denselben Abstand hat wie g. Es ist die **Bildgerade** g' von g. g' ist nicht nur parallel zu a, sondern auch parallel zu g.

Die Bildgerade g' konstruiert man, indem man den Punkt R an a spiegelt und durch den Bildpunkt R' die Parallele zu a zeichnet.

Den Vorgang mit anderen Parallelen zu a wiederholen. Man erhält sie, wenn man den Punkt R mit der Zughand greift und ihn auf a zu oder von a weg zieht; dabei wird die Gerade g parallel verschoben.

Die Urgerade g auch parallel verschieben, wenn die Bildgerade g' konstruiert ist, und beide Geraden beobachten. Dabei ergibt sich auch der Sonderfall: Ist g=a, so ist g'=g. Damit wir für die Beziehung "ist parallel zu" keine Ausnahme machen müssen, sagen wir auch in diesem Sonderfall: g' ist parallel zu g. Die Spiegelgerade ist zu sich selbst parallel.

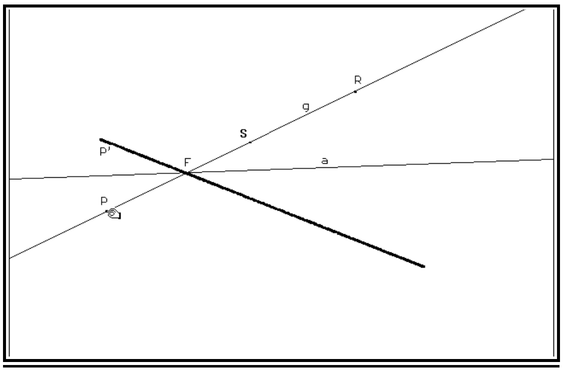
Damit die Spiegelgerade kein Sonderfall bleiben muß, verallgemeinern wir und sagen: Jede Gerade ist zu sich selbst parallel. Dann gilt aber auch für die Fixgeraden senkrecht zu den

Spiegelgeraden: Ur- und Bildgerade sind parallel. Jetzt läßt sich der 1. und 2. Fall so zusammenfassen:

Für jede Urgerade <u>senkrecht</u> oder <u>parallel</u> zur Spiegelgeraden ist die Bildgerade parallel zur Urgeraden.

<u>3. Fall:</u> **g soll zunächst weder senkrecht noch parallel zu a sein**

(g durch 2 Punkte R und S)



Wir beobachten: Wandert P auf g, so wandert P' ebenfalls auf einer Geraden, es ist die **Bildgerade** g'. Urgerade g und Bildgerade g' schneiden sich in einem Punkt F (Fixpunkt) der Spiegelgeraden a.

Die Bildgerade konstruiert man, indem man die Punkte R und S an a spiegelt und durch die Bildpunkte R' und S' eine Gerade zeichnet.

Den Vorgang mit anderen Geraden wiederholen. Man erhält sie, wenn man den Punkt R mit der Zughand greift und die Gerade um S dreht oder umgekehrt.

Die Urgerade g auch variieren, wenn die Bildgerade g' konstruiert ist, und beide Geraden beobachten. Dabei treten auch die beiden zuerst behandelten <u>Sonderfälle</u> auf: Ist g^a, so ist g'=g. Ist g||a, so ist auch g'||a. In beiden Fällen (und nur in diesen!) ist also g'||g.

Schließlich definieren wir für diesen allgemeinen Fall das **Makro <u>Geradenspiegeln-Gerade:</u>**

Eingabeobjekte:	Spiegelgerade a, die Punkte R und S (der Urgeraden g)
Zielobjekt:	Bildgerade g' (die durch R' und S' gezeichnet wurde)

Mit diesem Makro läßt sich sowohl eine "Gerade durch 2 Punkte" als auch eine "Gerade" mit 2 "Punkten auf Objekt" spiegeln. Die Urgerade kann auch durch <u>einen</u> Punkt gehen und der <u>andere</u> Punkt kann darauf liegen. Einer der beiden Punkte kann ein Fixpunkt (Punkt der Spiegelgeraden) sein.

Zu Anfang dieser Aufgabe haben wir uns gefragt, wie die Bildfigur einer Geraden aussieht. Diese Frage können wir jetzt beantworten:

Die Spiegelvorschrift bildet Gerade auf Gerade ab. Wir sagen: Sie ist **<u>geradentreu.</u>**

<u>Spiegeln an einem Kreis</u>

In "Spiegeln an..." fügen wir in die Leerstelle statt "einer Geraden" das Wort "einem Kreis" ein. An die Stelle der Spiegel<u>geraden</u> tritt jetzt der Spiegel<u>kreis.</u> Die Spiegelvorschrift bleibt sinngemäß unverändert. Lediglich tritt an die Stelle der Senkrechten zur Spiegelgeraden die (auf dem Kreis senkrecht stehende!) Durchmessergerade zum Spiegelkreis durch den Urpunkt P. Sie hat allerdings <u>zwei</u> Schnittpunkte mit dem Spiegelkreis, von denen man einen auswählen muß. Damit lautet die Abbildungsvorschrift:

(1) Einen Kreis k (den Spiegelkreis) zeichnen *("Kreis")*
(2) Einen Urpunkt P zeichnen *("Punkt")*
(3) Den Bildpunkt so konstruieren:
- Den Mittelpunkt M von k konstruieren *("Kreismittelpunkt")* und die Durchmessergerade PM zeichnen *("Gerade durch 2 Punkte")*
- Die Durchmessergerade mit dem Spiegelkreis k schneiden *("Schnitt")*
- Einen der beiden Schnittpunkte auswählen (z.B. den zwischen P und M) und einen Kreis k1 um diesen Schnittpunkt durch P zeichnen *("Kreis aus Kreismittelpunkt und Kreispunkt")*
- Die Durchmessergerade mit dem Kreis k1 schneiden *("Schnitt")*

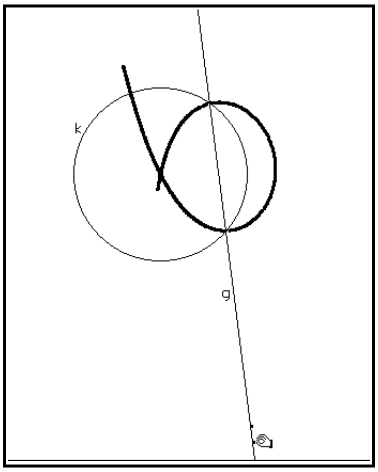
(4) Der eine Schnittpunkt ist P. Den anderen nennen wir P', er ist der Bildpunkt von P.

Anschließend definieren wir das **Makro <u>Kreisspiegeln:</u>**

Eingabeobjekte:	Spiegelkreis k, Urpunkt P
Zielobjekt:	Bildpunkt P'

Damit und mit der Option Ortslinie soll eine Gerade g an einem Kreis k gespiegelt werden. Gefragt ist wieder nach der Gestalt der Bildfigur:

(1) Einen Spiegelkreis k zeichnen *("Kreis")*
(2) Eine Urgerade g zeichnen *("Gerade")*, einen "laufenden Punkt" P auf g legen *("Punkt auf Objekt")*
(3) Die Bildfigur so markieren:
- Den Punkt P an k spiegeln *(Makro Kreisspiegeln)*, den Bildpunkt P' nennen
- Die Option ORTSLINIE wählen, P' anklicken, P mit der Zughand greifen und auf g wandern lassen



<u>Fallunterscheidung</u>:
- Die Gerade kann den Spiegelkreis schneiden, berühren oder meiden.
- Meidet die Gerade den Kreis, so ist der Abstand vom Kreismittelpunkt zu beachten.

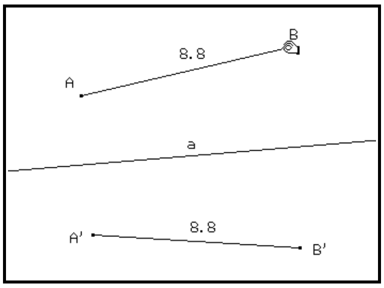
Man stellt fest: k ist Fixpunktkreis. (Gibt es auch Fixkreise?) Die Kreisspiegel-Vorschrift hat Fixgeraden (alle Geraden durch den Kreismittelpunkt), aber im allgemeinen werden Gerade nicht auf Gerade abgebildet. **Kreisspiegeln ist nicht geradentreu.** Dem Kreisspiegeln entspricht im Raum das Spiegeln an einer Kugel (z.B. Christbaumkugel). Andere nicht geradentreu abbildende Spiegel sind die Zylinderspiegel ("Zerrspiegel"). <u>Geradentreue ist also keine "selbstverständliche" Eigenschaft einer Spiegelvorschrift.</u>

GERADENSPIEGELN IST EINE KONGRUENZVORSCHRIFT

Weil beim Spiegeln an Geraden jede Gerade wieder auf eine Gerade abgebildet wird, werden auch Strecken wieder auf Strecken abgebildet. Wie aber wirkt sich das Spiegeln auf die Streckenlänge aus?

(1) Eine Spiegelgerade a zeichnen
(2) Eine **Urstrecke** [AB] zeichnen *("Strecke")*
(3) Die **Bildstrecke** konstruieren:
- Die Punkte A und B an a spiegeln *(Makro Geradenspiegeln)*, die Bildpunkte A' und B' nennen
- Die Strecke [A'B'] zeichnen

(4) Ur- und Bildstrecke messen *("Messung")*



Die Strecke(nlänge) variieren (den Punkt A oder B mit der Zughand greifen und auf der Zeichenebene frei wandern lassen), dabei die Längenmaße vergleichen. Die Messung ist nur auf Millimeter genau. Im Rahmen dieser Meßgenauigkeit können wir vermuten, daß Ur- und Bildstrecken stets gleichlang sind. Wir nehmen an (das ist eine unbeweisbare Annahme, ein **Axiom**,), daß auch bei einem idealen Meßwerkzeug (das es in Wirklichkeit nicht gibt) die Maßzahlen von Ur- und Bildstrecke gleich wären. Mit dieser Annahme heben wir die Geometrie aus dem rein praktischen Umgang mit Zirkel und Lineal bzw. Geodreieck auf die gedankliche Ebene und damit die der Mathematik.

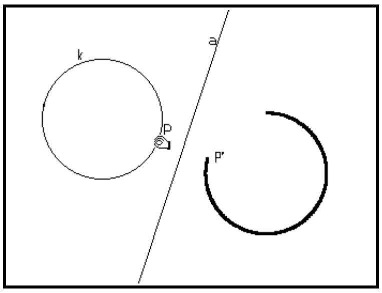
Die Spiegelvorschrift bildet Strecken auf gleichlange (deckungsgleiche, kongruente) Strecken ab. Wir sagen: **Die Spiegelvorschrift ist längentreu.**

Deshalb nennt man die Spiegelvorschrift eine *längentreue Vorschrift* oder kurz eine **Kongruenzvorschrift**. Sie ist, wie wir später sehen werden, nicht die einzige Kongruenzvorschrift. Deshalb ist "Kongruenzvorschrift" mehr als nur ein neuer Name.

ERSTE FOLGERUNG AUS DER LÄNGENTREUE: DIE KREISTREUE

Es soll das Spiegelbild eines Kreises nach Gestalt und Lage bestimmt werden. Dazu verwenden wir die zweischrittige Ortslinien-Strategie. Der 1. Schritt geht so:

(1) Die Spiegelgerade a zeichnen *("Gerade")*
(2) Den **Urkreis** k zeichnen *("Kreis")*
(3) Die Bildfigur so markieren:
- Einen Punkt P auf k legen *("Punkt auf Objekt")*
- Die Option ORTSLINIE aufrufen, den Punkt P' anklicken, den Punkt P mit der Zughand greifen und auf dem Kreis wandern lassen



Wir vermuten: Das Bild des Kreises k ist ein Kreis k'; der Mittelpunkt M' von k' ist das Bild des Mittelpunktes M von k, die Radien von Ur- und Bildkreis sind gleichgroß. Im <u>2. Schritt</u> fahren wir also so fort:

(4) Beim Kreis k den Mittelpunkt M *("Kreismittelpunkt")* und einen Kreispunkt K *("Punkt auf Objekt")* hinzufügen

(5) Den vermuteten Bildkreis k' so konstruieren:

- Die Punkte M und K an a spiegeln, *(Makro Geradenspiegeln)*, die Bildpunkte M' und K' nennen
- Den Kreis um M' durch K' zeichnen *("Kreis aus Kreismittelpunkt und Kreispunkt")* und k' nennen (Wegen der Längentreue der Spiegelvorschrift ist sein Radius |M'K'|=|MK|)

(6) Die Option ORTSLINIE nochmals aufrufen und damit das Bild des Kreises k markieren.

Wir sehen, daß sich der konstruierte Kreis k' und der mit der Option ORTSLINIE markierte Kreis decken. K' ist also das Bild von k, k' ist der **Bildkreis** von k. (Die markierte Kreislinie kann jetzt gelöscht werden.) **Die Spiegelvorschrift ist <u>kreistreu.</u>**

Aus der Konstruktionsvorschrift des Kreises k' entwickeln wir das **Makro <u>Geradenspiegeln-Kreis:</u>**

Eingabeobjekte:	Spiegelgerade a, Kreismittelpunkt M und Kreispunkt K des Urkreises (in dieser Reihenfolge)
Zielobjekt:	Bildkreis

Mit diesem Makro läßt sich nicht nur (wie eben durchgeführt) ein "Kreis" mit "Kreismittelpunkt" und Kreis-"Punkt auf Objekt", sondern auch ein "Kreis aus Kreismittelpunkt und Kreispunkt" spiegeln.

Schließlich variieren wir den Urkreis stetig nach Lage und Größe (den "Kreis" bzw. beim "Kreis aus Kreismittelpunkt und Kreispunkt" den Mittelpunkt und den Kreispunkt mit der Zughand greifen) und beobachten Ur- und Bildkreise. Dabei kann man drei Fälle unterscheiden: Der Urkreis schneidet, berührt oder meidet die Spiegelgerade. Alle Kreise, deren Mittelpunkte auf der Spiegelgeraden liegen, sind **Fixkreise.**

<u>ZWEITE FOLGERUNG AUS DER LÄNGENTREUE: DIE KONGRUENZ VON UR- UND BILDDREIECK UND DIE WINKELTREUE</u>

Es sollen beim Geradenspiegeln sowohl Ur- und Bilddreieck und auch Ur- und Bildwinkel verglichen werden. Dazu spiegeln wir ein Dreieck:

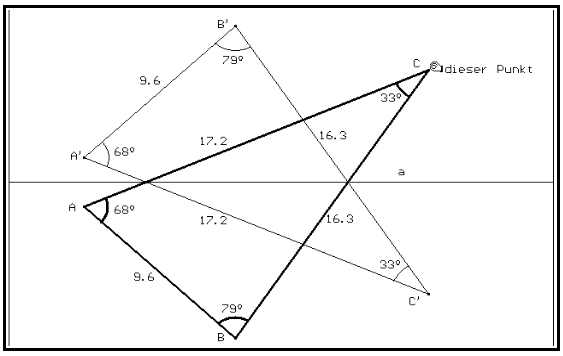
(1) Die Spiegelgerade a zeichnen *("Gerade")*

(2) Ein Urdreieck ABC zeichnen *("Dreieck")*

(3) Das Bilddreieck konstruieren:
Das Urdreieck an a spiegeln *(Makro Geradenspiegeln-Dreieck)*, das Bilddreieck A'B'C' nennen

(4) Die Stücke des Ur- und Bilddreiecks messen:

- Die Seitenlängen messen *("Messung")*
- Die Eckenwinkel markieren *("Winkelmarkierung")* und messen



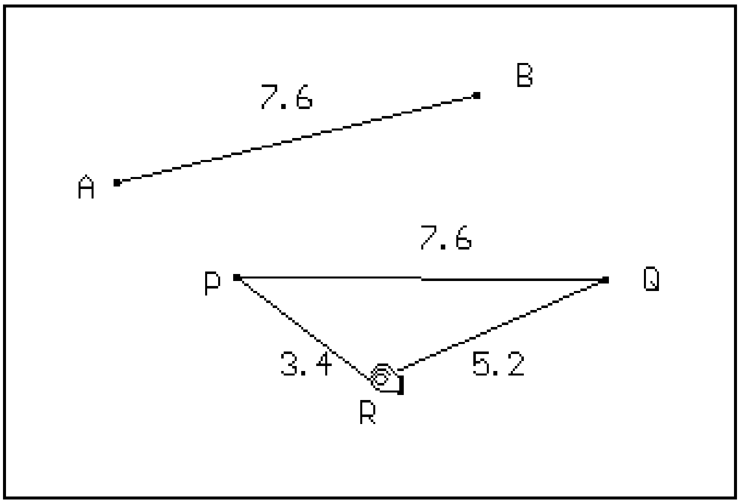
("Messung")

Die eine oder andere Ecke des Urdreiecks greifen und in der Zeichenebene wandern lassen, dabei die Streckenlängen und Winkelweiten von Ur- und Bilddreieck beobachten. Wir sehen:

- Für jedes Urdreieck sind entsprechende Seiten von Ur- und Bilddreieck gleichlang. (Das liegt an der Längentreue der Spiegelvorschrift.) Ur- und Bilddreiecke haben deshalb dieselbe Form und Größe; man sagt, sie sind **deckungsgleich (kongruent). Die Spiegelvorschrift bildet Dreiecke auf kongruente Dreiecke ab.**
- Für jedes Urdreieck sind entsprechende Winkel von Ur- und Bilddreieck gleichweit. (Das liegt an der Deckungsgleichheit der Dreiecke.) **Die Spiegelvorschrift ist <u>winkeltreu.</u>**

<u>DRITTE FOLGERUNG AUS DER LÄNGENTREUE:</u>
<u>DIE GERADENTREUE</u>

Aus der Längentreue folgen nicht nur diese beiden wichtigen Eigenschaften, sondern sogar die grundlegende Eigenschaft der Geradentreue (die wir bisher nur anschaulich kennen).

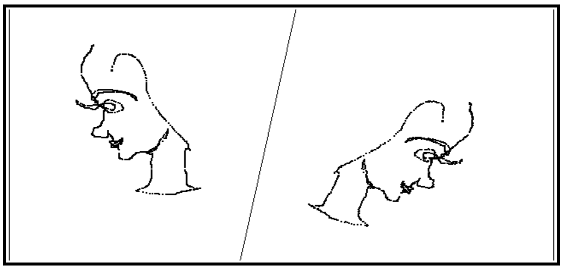


Nehmen wir einmal an, eine Urstrecke [AB] werde durch eine <u>längentreue</u> Abbildungsvorschrift auf eine Bildfigur abgebildet. Dann kann diese Bildfigur eine *Strecke* [PQ] sein *(Makro Streckenübertragung)*. Wir können uns aber fragen, ob die Bildfigur notwendig eine (gerade) Strecke sein muß oder ob sie auch einen Knick haben kann. Dazu legen wir einen Punkt R auf [PQ] *("Punkt auf Objekt")*, und zeichnen die Strecken [PR] und [RQ]; die Bildfigur soll jetzt [PR]È[RQ] sein. Zuletzt messen wir alle Strecken *(Mehrdeutigkeiten beseitigen).* Solange R auf [PQ] wandert, sind Urfigur [AB] und Bildfigur [PQ]È[QR] gleichlang (Maßzahlvergleich). Wenn man aber die Verbindung von R an [PQ] löst *("Verbindung aufheben")* und R außerhalb von [PQ] wandert, so daß die Bildfigur in R einen Knick hat, ist die Bildfigur in jedem Fall länger als die Urfigur.

Weil bei einer <u>längentreuen</u> Abbildungsvorschrift Bildfigur und Urfigur immer gleichlang sein müssen, kann die Bildfigur also keinen Knick haben. R muß auf [PQ] liegen, die Bildfigur muß <u>gerade</u> sei. **Längentreue Vorschriften sind geradentreu**.

Der Name "Kongruenz"-Vorschrift weist demnach auf eine grundlegende Eigenschaft hin.

DIE ORIENTIERUNGSEIGENSCHAFT DER SPIEGELVORSCHRIFT



Bei der oben zum Thema *Kreistreue* abgebildeten Figur ist die Ortslinie (also der Bildkreis) absichtlich nicht vollständig ausgeführt. Es soll damit angedeutet werden, daß man bei der Konstruktion der Ortslinie nicht nur auf das Ergebnis (das ist die Bildfigur), sondern auch auf das Entstehen der Figur achten sollte. Am besten führt man die Konstruktion des Bildkreises als Ortslinie noch einmal aus oder macht (wie hier an einem Beispiel gezeigt) eine Freihandzeichnung und beobachtet das Wandern von Ur- und Bildpunkt. Wandert der Urpunkt (wie in der Zeichnung oben) im Gegenuhrzeigersinn seinen Rundweg auf dem Urkreis, so durchläuft der Bildpunkt ebenfalls einen Rundweg, jedoch im Uhrzeigersinn. Und umgekehrt: Wandert der Urpunkt im Uhrzeigersinn, dann der Bildpunkt im Gegenuhrzeigersinn. Jede Uhr und ihr Spiegelbild haben entgegengesetzten Drehsinn. Wir sagen: **Geradenspiegeln ist gegenorientierungstreu (antiorientierungstreu).**

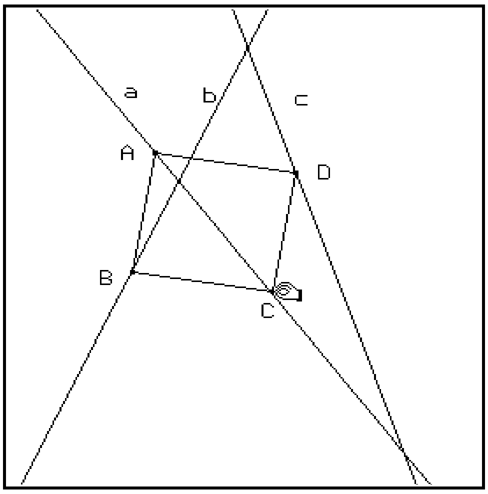
Noch eine Anmerkung: Weil später oft von gleich- und verschieden orientierten Dreiecken die Rede ist, liegt es nahe, die Orientierungseigenschaft (statt an einem Kreis) an einem Dreieck einzuführen. Das ist aber deshalb nicht möglich, weil der Punkt P bei der Option Ortslinie nicht "um die Ecken herumkommt".

EINE AUFGABENFAMILIE

Die Aufgabenfamilie besteht aus einer Grundaufgabe und zwei Variationen bzw. Verallgemeinerungen. Dabei wird die Spiegelvorschrift (also ein abbildungsgeometrisches Werkzeug) als Konstruktionsmittel für eine figurengeometrische Aufgabe eingesetzt. Die figurengeometrisch formulierte Aufgabe muß deshalb zuerst abbildungsgeometrisch uminterpretiert werden.

Die Grundaufgabe: Zeichne drei Geraden a, b, c. Konstruiere ein Quadrat, von dem zwei Ecken auf a und je eine auf b und c liegen.

Zuerst zeichnen wir eine Überlegungsfigur:



(1) Drei Geraden a, b, c zeichnen *("Gerade")*

(2) Zwei Punkte auf die Gerade a legen *("Punkt auf Objekt")* und A und C nennen

(3) Das Quadrat über den diagonal liegenden Punkten A und C zeichnen *(Makro Quadrat aus diagonalen Eckpunkten)*

(4) A und/oder C, notfalls auch b und/oder c verziehen, bis optisch B auf b und D auf c liegen.

Diese beiden optisch hergestellten Objektbindungen "B auf b" und "D auf c" kann man mit dem Cabri Géomètre nicht fixieren. Man muß sie sich denken. (Wichtig!)

Aus der Überlegungsfigur ergibt sich die Lösungsstrategie: Die Gerade a ist Symmetrieachse des Quadrats. Durch Spiegeln an a wird das Quadrat auf sich abgebildet (Deckabbildung des Quadrats), dabei werden B und D aufeinander abgebildet. Wegen der Objektbindung von B an b und D an c werden mit den beiden Punkten B und D auch die Geraden b und c mitgespiegelt. Die Bildgerade b' geht durch B'=D und c' geht durch D'=B. Also ist B der Schnittpunkt von b und c', entsprechend ist D der Schnittpunkt von c und b'.

Aus der (abbildungsgeometrischen) Lösungsstrategie entwickeln wir die (figurengeometrische) Konstruktionsvorschrift, indem wir die Konstruktionsschritte nacheinander aufschreiben. Mit der "Rückblende" können wir sie uns anschließend noch einmal vergegenwärtigen.

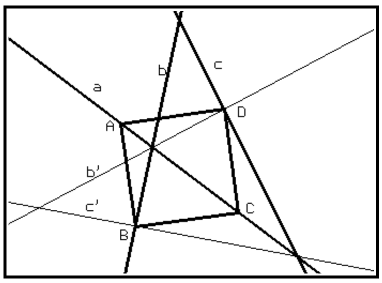
(1) Drei Geraden a, b, c zeichnen *("Gerade")*

(2) Die Geraden b und c spiegeln:

- a und b, b und c, c und a schneiden *("Schnitt")*, damit man für das anschließende Spiegeln zwei Punkte je Gerade zur Verfügung hat, oder 2 "Punkte auf Objekt" b und c legen
- Die Geraden b und c an der Geraden a spiegeln *(Makro Geradenspiegeln-Gerade)* die Bildgeraden b' bzw c' nennen

(3) Die Geraden b und c' schneiden *("Schnitt")*, den Schnittpunkt B nennen
Die Geraden c und b' schneiden *("Schnitt")*, den Schnittpunkt D nennen

(4) Das Quadrat über den diagonal liegenden Eckpunkten B und D zeichnen *(Makro Quadrat aus diagonalen Eckpunkten)*,
Die Eckpunkte auf der Geraden a mit A und C bezeichnen.

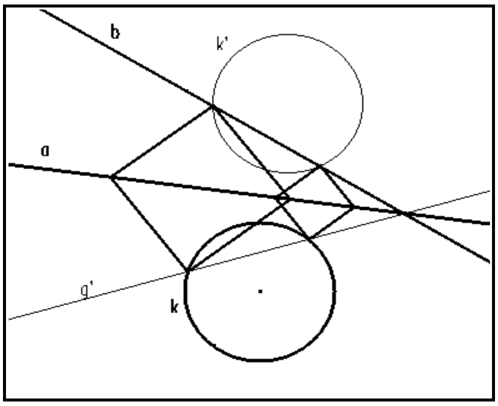


Fallunterscheidung: Wir betrachten jetzt die Geraden b und c als Parameter. Während wir c wieder als "Gerade" zeichnen und damit parallel verschieben können, zeichnen wir b als "Gerade durch 2 Punkte", nämlich einen "Punkt auf Objekt a" und einen weiteren Punkt, um b drehen zu können. Dann führen wir die Konstruktion des Quadrats wie oben durch.

Nun drehen wir die Gerade b um ihren Schnittpunkt mit a eine volle Umdrehung, verschieben gegebenenfalls auch c und beobachten dabei die stetigen Veränderungen der Geraden b,b',c,c' und des Quadrats. Bezüglich der Anzahl der Lösungen finden wir:

- Schneiden sich b' und c bzw. c' und b in 1 Punkt, so hat die Aufgabe genau 1 Lösung.
- Im Falle b=b'=a ist die Lösung ausgeartet (ein Punkt).
- Ist b' parallel zu c bzw c' parallel zu b, so gibt es für b'=c, c'=b beliebig viele, im anderen Falle keine Lösungen.

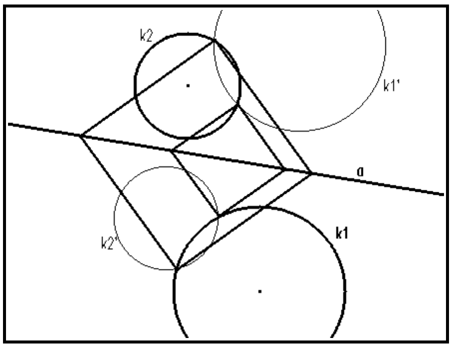
<u>Erste Variation der Grundaufgabe:</u> Die Gerade c wird durch einen Kreis k ("Kreis") ersetzt. Gesucht sind alle Quadrate ABCD, deren Ecken A und C auf a, B auf b und D auf k liegen.



Zum Konstruieren werden die Makros "Geradenspiegeln-Gerade", "Geradenspiegeln-Kreis" und das Makro "Quadrat aus diagonalen Eckpunkten" benötigt.

Zur <u>Fallunterscheidung</u> drehen wir die Gerade b um ihren Schnittpunkt mit a ("Gerade durch 2 Punkte"). Es gibt 2, 1 oder keine Lösung, je nachdem, ob b' und k bzw k' und b sich schneiden, berühren oder meiden.

<u>Die zweite Variation:</u> Die Geraden b und c werden beide durch Kreise k1 bzw. k2 ersetzt. Gesucht sind alle Quadrate ABCD, deren Ecken A und C auf a, B auf k1 und D auf k2 liegen.



Zur Konstruktion werden die Makros "Geradenspiegeln-Kreis" und "Quadrat aus diagonalen Eckpunkten" benötigt.

Zur <u>Fallunterscheidung</u> verschieben wir einen Kreis und/oder ändern den Radius ("Kreis aus Kreismittelpunkt und Kreispunkt"). Es gibt 2, 1, keine oder beliebig viele Lösungen, je nachdem, ob k1' und k2 bzw k2' und k1 sich schneiden, berühren, meiden oder gleich sind.

<u>MEHRFACHSPIEGELN AN SICH SCHNEIDENDEN GERADEN</u>

(1) Die Spiegelgeraden zeichnen:

- 2 oder 3 oder 4 oder 5 oder 6 Geraden a,b,c,d,e,f zeichnen, die sich in einem Punkt schneiden *("Gerade durch 2 Punkte")*
- Die Winkel zwischen je zwei Geraden markieren *("Winkelmarkierung")* und messen *("Messung")*

- Die Geraden so drehen, daß die Winkel zwischen den 2 Geraden 90 Grad, zwischen den 3 Geraden 60 Grad, zwischen den 4 Geraden 45 Grad, zwischen den 5 Geraden 36 Grad, zwischen den 6 Geraden 30 Grad groß sind (zusammen gibt es immer 180 Grad!)

(2) Ein Dreieck ABC zeichnen *("Dreieck")*

(3) Das Dreieck mehrfachspiegeln *(mehrmals das Makro Geradenspiegeln-Dreieck anwenden)* :

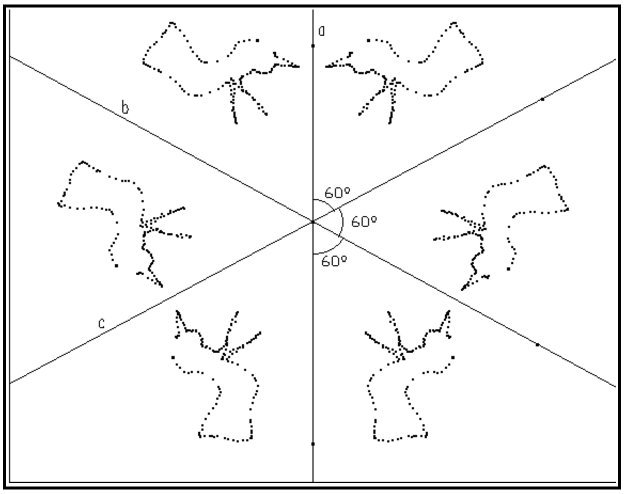
- Das Dreieck ABC an a spiegeln, das Bilddreieck A1B1C1 nennen, dann
  das Dreieck A1B1C1 an b spiegeln, das Bilddreieck A2B23C2 nennen, dann
  das Dreieck A2B2C2 an c spiegeln, das Bilddreieck A3B3C3 nennen, dann...........
- Das letzte Bilddreieck wieder an a spiegeln und dann so fort bis zur vorletzten Spiegelgeraden

Das Mehrfachspiegeln kann auch als Freihandzeichnen durchgeführt werden:

(2) Einen Punkt P zeichnen

(3) Den Punkt P mehrfachspiegeln *(mehrmals das Makro Geradenspiegeln anwenden)* :

- Den Punkt P an a spiegeln, den Bildpunkt P1 nennen, dann
  den Punkt P1 an b spiegeln, den Bildpunkt P2 nennen, dann
  den Punkt P2 an c spiegeln, den Bildpunkt P3 nennen, dann........
- Den letzten Bildpunkt wieder an a spiegeln und dann so fort bis zur vorletzten Spiegelgeraden



(4) Die Option ORTSLINIE aufrufen, die Shift-Taste drücken und die Punkte P, P1, P2, P3, ... nacheinander anklicken, den Punkt P mit der Zughand greifen und mit dem Freihandzeichnen beginnen.

DAS KALEIDOSKOP

Aus zwei Spiegeln, einer Papprӧhre und bunten Glassplittern in einer gläsernen Dose kann man das **Kaleidoskop** genannte Spielzeug basteln. Wir fragen uns, welchen Winkel die Spiegel miteinander bilden müssen, damit man schöne Bilder sieht. Zunächst die Konstruktionsvorschrift: für einen 30 Grad weiten Winkel:

(1) Eine Gerade a durch 2 Punkte F und A und eine Gerade b durch 2 Punkte, nämlich denselben Punkt F und einen Punkt B zeichnen *("Gerade durch 2 Punkte")*

(2) Einen 30 Grad weiten Winkel zwischen den Geraden a und b herstellen:

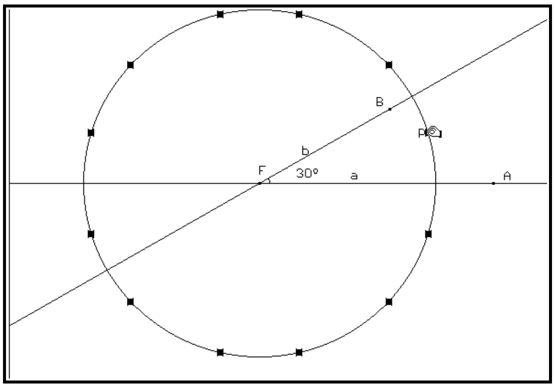
- Den Winkel AFB markieren *("Winkelmarkierung")* und messen *("Messung")*
- Den Punkt B greifen und die Gerade b so drehen, daß die Winkelweite 30 Grad beträgt

(3) Einen Punkt P im Winkel zeichnen *("Punkt")*

(4) Den Punkt P mehrfachspiegeln *(mehrmals das Makro Geradenspiegeln anwenden)* :
Den Punkt P an a spiegeln, den Bildpunkt P1 nennen, dann
den Punkt P1 an b spiegeln, den Bildpunkt P2 nennen, dann

den Punkt P2 an a spiegeln, den Bildpunkt P3 nennen, dann
den Punkt P3 an b spiegeln, den Bildpunkt P4 nennen, dann.........

Wir beobachten:



- Der 12. Bildpunkt fällt auf den Urpunkt. (Weil die Winkelmessung nur auf Grad genau ist, muß man gegebenenfalls den Winkel durch Drehen der Geraden b geringfügig korrigieren.)
- Alle 12 Punkte liegen auf einem Kreis, nämlich auf dem Kreis um F durch P. Wir zeichnen den Kreis. *("Kreis aus Kreismittelpunkt und Kreispunkt")*
- Wir greifen den Punkt P mit der Zughand und lassen ihn von a durch das Winkelgebiet nach b wandern. Sonderfälle: Liegt P auf a oder auf b, so sehen wir nur noch 6 Punkte. Liegt P auf der Winkelhalbierenden, so liegen alle Punkte in regelmäßigem Abstand **(regelmäßiges 12-Eck).**
- Wir greifen den Punkt B mit der Zughand und drehen die Gerade b um F. Dabei beobachten wir:

  Es gibt Winkel, bei denen die Bildpunkte ungeordnet liegen und keiner der Bildpunkte auf einen Urpunkt trifft. In diesen Fällen würde ein Kaleidoskop keine "schönen" Bilder liefern.

  Es gibt aber auch Winkel, bei denen die Bildpunkte geordnet auf dem Kreis liegen und einer der Bildpunkte auf den Urpunkt trifft. In diesen Fällen wird das Kaleidoskop "schöne" Bilder liefern.

  Mit größer werdendem Winkel nimmt die Anzahl der sichtbaren Punkte ab. Wir fragen nach einer Beziehung zwischen den Winkeln mit "schönen" Bildern und der Anzahl der dabei sichtbaren Punkte. Dazu drehen wir die Gerade b von 30° bis 180° und stellen das Ergebnis in einer Tabelle zusammen:

Winkel mit "schönen" Bildern.............	30°	45°	60°	90°	120°	180°
Anzahl der sichtbaren Punkte.............	12	8	6	4	3	2

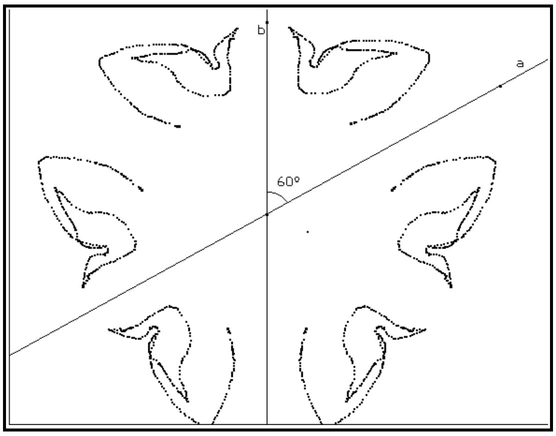
- Hätte man das Experiment mit dem 15°-Winkel begonnen, so hätte man 24 Bildpunkte konstruieren müssen. Der 24. Bildpunkt wäre auf den Urpunkt gefallen.

In der Praxis bastelt man das Kaleidoskop mit einem 60°-Winkel, und das hat einen technischen und einen physikalischen Grund.

- Der technische Grund: Man braucht nur die beiden Spiegel mit einem gleichbreiten Stück Pappe mittels Klebestreifen zusammenzufügen. Der Querschnitt ist dann ein gleichseitiges Dreieck und damit ist der 60°-Winkel gesichert.

- <u>Der physikalische Grund:</u> Je kleiner der Winkel, desto größer zwar die Anzahl der Bildpunkte und damit die Vielfalt des Bildes, desto lichtschwächer aber auch die vielen Spiegelbilder. Der 60^{o}-Winkel ist einen Kompromiß zwischen der Vielfalt und der Lichtstärke.

Statt einen Punkt kann man auch ein Dreieck oder eine freihandgezeichnete Figur im Kaleidoskop spiegeln. Für das Freihandzeichnen muß man allerdings noch eine Anweisung hinzufügen:

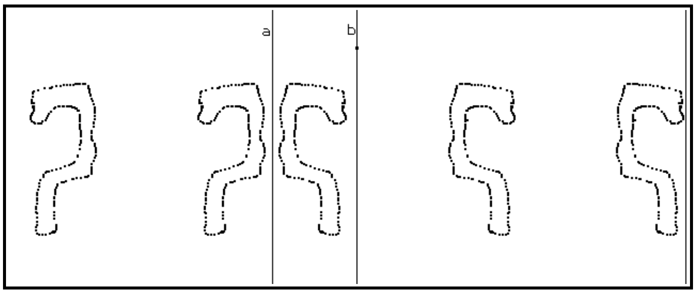


> (5) Die Option ORTSLINIE aufrufen, die Shift-Taste drücken und die Punkte P, P1, P2, P3, ... nacheinander anklicken, den Punkt P mit der Zughand greifen und mit dem Freihandzeichnen beginnen.

Man vergleiche das Kaleidoskop-Bild mit dem Bild beim Mehrfachspiegeln.

DIE PARALLELSPIEGEL

Beim Kaleidoskop handelt es sich um zwei sich schneidende Spiegelgeraden. Jetzt sollen die beiden Spiegelgeraden parallel sein ("Gerade" a und "Parallele" b zu a durch einen beliebigen Punkt B). Die Konstruktionsvorschriften für das Abbilden eines Punktes bzw. Dreiecks und das Freihandzeichnen sind dieselben wie beim Kaleidoskop.



Hat man einen Punkt abgebildet, so greife man den Urpunkt, variiere ihn zwischen den beiden Spiegeln und messe dabei die Abstände zwischen P, P2, P4, ... bzw. P1, P3, ... ("Strecke", "Messung"). Man greife auch den Punkt B und variiere den Abstand der Spiegelgeraden.

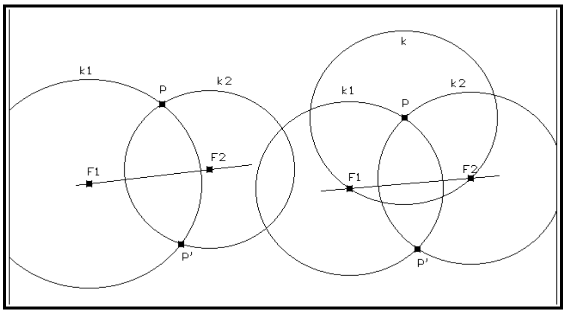
DREI WEITERE ERGEBNISGLEICHE SPIEGELVORSCHRIFTEN

Wenn wir die Spiegelvorschriften nach dem verwendeten Hilfsmittel benennen, so können wir bei der bisher benutzten Vorschrift, bei der im Unterricht gewöhnlich das Geodreieck verwendet wird, von der **Geodreieck-Vorschrift** sprechen. Entsprechend wollen wir bei den drei folgenden Vorschriften verfahren, bei denen wir das Spiegeln mit anderen Werkzeugen durchführen werden.

Die Zirkel-Lineal-Vorschrift.

Aufgabe: Gegeben sind eine Spiegelgerade a (Lineal!) und ein Urpunkt P. Der Bildpunkt P' soll allein mit dem Zirkel konstruiert werden.

Lösungsstrategie: Es werden auf der Spiegelgeraden zwei Punkte (Fixpunkte) F1 und F2 markiert und mit ihnen als Mittelpunkte Kreise durch P gezeichnet. Der zweite Schnittpunkt der beiden Kreise ist der Bildpunkt P'. Die Punkte F1 und F2 kann man entweder beliebig auf a markieren oder als Schnittpunkte eines hinreichend großen Kreises um P mit der Spiegelgeraden a konstruieren. Die Abbildungsvorschrift lautet also:



(1) Die Spiegelgerade a zeichnen *("Gerade")*

(2) Einen Urpunkt P zeichnen *("Punkt")*

(3) Die zwei Fixpunkte so konstruieren:
- Linke Zeichnung: Zwei beliebige Punkte F1 und F2 auf a zeichnen *("Punkt auf Objekt")*
  Rechte Zeichnung: Einen beliebigen Punkt F1 auf a zeichnen, *("Punkt auf Objekt")*, den Kreis k um P durch F1 zeichnen *("Kreis aus Kreismittelpunkt und Kreispunkt")*, Kreis und Spiegelgerade schneiden *("Schnitt")*, den anderen Schnittpunkt F2 nennen

(4) Den Bildpunkt P' konstruieren:
- Die Kreise k1 und k2 um F1 und F2 durch P zeichnen *("Kreis aus Kreismittelpunkt und Kreispunkt")* und schneiden *("Schnitt")*
- Der eine Schnittpunkt ist P. Den anderen Schnittpunkt P' nennen, er ist der Bildpunkt zu P.

Wichtig ist zu erkennen, daß diese Konstruktionen *unabhängig von der Wahl der darin vorkommenden Parameter* (links die Stellen von F1 und F2, rechts der Radius von k) zu einem gegebenen Urpunkt stets ein und denselben Bildpunkt als Ergebnis liefern. Dazu greift man bei der linken Zeichnung den Punkt F1 und/oder F2 mit der Zughand, läßt ihn auf a wandern und beobachtet P'. Bei der rechten Zeichnung greift man den Punkt F1 mit der Zughand, läßt ihn auf a wandern und beobachtet P'.

Schließlich kann man auch den Punkt P mit der Zughand greifen, auf der Zeichenebene wandern lassen und den Bildpunkt beobachten.

1. Anmerkung: Für diese Konstruktionsvorschriften lassen sich allerdings keine Makros definieren, da "beliebig" kein für den Cabri Géomètre definierbarer Begriff ist.

2. Anmerkung: Will man, wie hier gezeigt, der Übersichtlichkeit wegen eine Gerade nicht von Seitenrand zu Seitenrand zeichnen, so lege man zwei Punkte auf sie, zeichne die Strecke zwischen den beiden Punkten und radiere zuletzt die Gerade und die beiden Punkte aus.

Die Zirkel-Vorschrift

Aufgabe: Gegeben sind ein Urpunkt A und sein Bildpunkt A'. Zu einem beliebigen Punkt P der Zeichenebene soll der Bildpunkt P' allein mit dem Zirkel konstruiert werden.

Lösungsstrategie: Zuerst konstruieren wir zwei Fixpunkte F1 und F2 und verfahren dann weiter wie oben. Die Fixpunkte erhalten wir als Schnittpunkte zweier hinreichend großer Kreise um A und A' mit gleichem Radius.

Die Abbildungsvorschrift lautet dann:

(1) Zwei Punkte A und A' zeichnen *("Punkt")*

(2) Einen Urpunkt P zeichnen *("Punkt")*

(3) Die zwei Fixpunkte so konstruieren:

- Um A und A' Kreise mit gleichem Radius, die sich schneiden, wie folgt zeichnen:

  (a) Eine Strecke [UV] zeichnen, für die |UV|>|AA'|:2 ist *("Strecke")*

  (b) Einen Richtungspunkt R zeichnen, die Strecke [UV] von A und von A' aus in Richtung R übertragen *(Makro Streckenübertragung)*, die Endpunkte E1 und E2 nennen

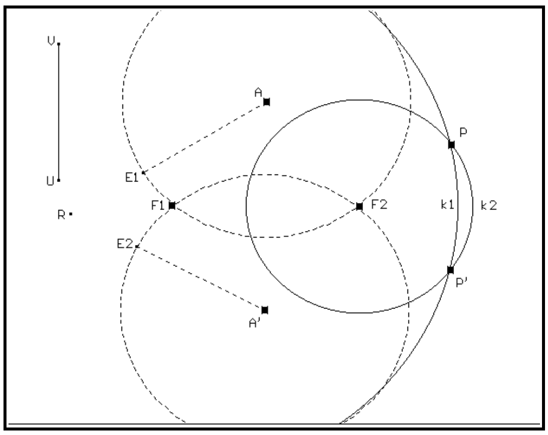
  (c) Die Kreise um A durch E1 und um A' durch E2 zeichnen *("Kreis aus Kreismittelpunkt und Kreispunkt")*

  (d) Die beiden Kreise schneiden *(Schnitt")*, die Schnittpunkte F1 und F2 nennen

  (f) Die Hilfslinien (Radiusstrecken samt Endpunkten E1 und E2, Kreise um A und A') ausradieren *("Radiergummi")*

(4) Den Bildpunkt wie bei der Zirkel-Lineal-Vorschrift konstruieren.

Wichtig ist es wieder zu erkennen, daß der Bildpunkt unabhängig vom Parameter der Abbildungsvorschrift (das ist die Streckenlänge |UV|) ist. Dazu den Punkt U oder V mit der Zughand greifen, die Länge von [UV] variieren und den Bildpunkt beobachten.



Auch den Urpunkt P greifen und variieren. Sonderfälle: P=A, P=A', P=P' (Fixpunkt, die beiden Kreise k1 und k2 berühren sich).

Zuletzt noch den Punkt A' greifen und auf der Zeichenebene wandern lassen.

Auch diese Vorschrift ist in der vorliegenden Fassung für die Definition eines Makro ungeeignet, weil die Bedingung |UV|>|AA'|:2 für den Radius der Kreise keine eindeutige Festlegung beinhaltet. Doch läßt sich ein solcher Radius mit |UV|=|AA'| eindeutig definieren, so daß man die Vorschrift damit leicht "makro-tauglich" machen kann:

(3) Die zwei Fixpunkte so konstruieren:

- Kreis um A durch A' und Kreis um A' durch A zeichnen *("Kreis aus Kreismittelp. und Kreispunkt")*
- Die beiden Kreise schneiden *("Schnitt")*, die Schnittpunkte F1 und F2 nennen

Hieran anschließend kann man das **Makro** **<u>Zirkelvorschrift</u>** definieren:

Eingabeobjekte: Punkte A und A', Urpunkt P
Zielobjekt: Bildpunkt P'.

Wir machen uns bewußt: Um ein Makro definieren zu können, muß der Konstruktionsweg von den Eingabe- zu den Zielobjekten bei jedem Schritt <u>eindeutig</u> sein. Auch für die Definition von Makros muß man Strategien entwickeln.

.Die Lineal-Vorschrift

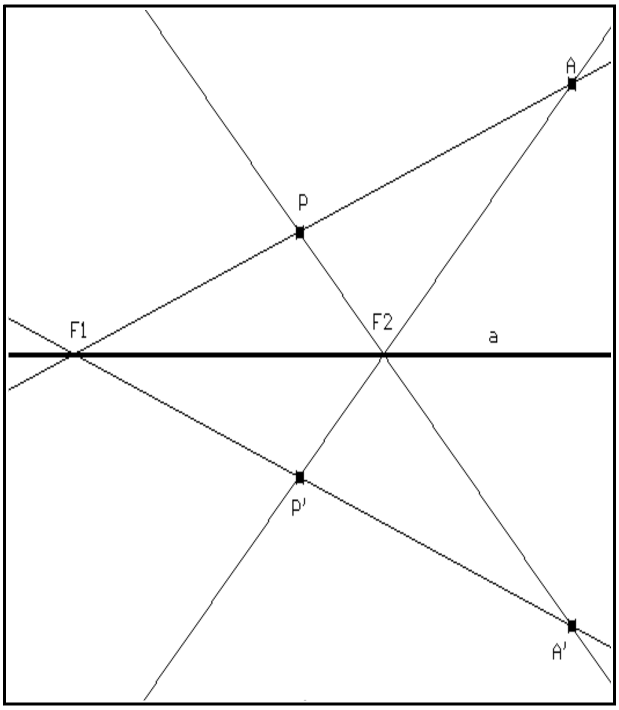
<u>Aufgabe:</u> Gegeben sind eine Spiegelgerade a, ein Punkt A und sein Bildpunkt A', außerdem ein Urpunkt P. Der Bildpunkt P' soll allein mit dem Lineal konstruiert werden.

<u>Lösungsstrategie</u>: Die Bilder der Geraden AP und A'P schneiden sich (wegen der Wechselseitigkeit der Spiegelvorschrift) im Bildpunkt P'.

Damit lautet die <u>Abbildungsvorschrift</u>:

(1) Die Spiegelgerade a zeichnen *("Gerade")*
Den Punkt A *("Punkt")* und den Punkt A' zeichnen *(Makro Geradenspiegeln)*
(2) Einen Urpunkt P zeichnen *("Punkt")*
(3) Den Bildpunkt so konstruieren:
- Die Geraden AP und A'P zeichnen *("Geraden durch 2 Punkte")*
- Diese Geraden mit a schneiden *("Schnitt")*, die Schnittpunkte F1 bzw F2 (Fixpunkte) nennen
- Die Bildgeraden A'F1 und AF2 zeichnen *("Geraden durch 2 Punkte")*
- Die Bildgeraden schneiden *("Schnitt")*

(4) Den Schnittpunkt der Bildgeraden P' nennen. Es ist der Bildpunkt von P.



Im Grunde handelt es sich auch hier wieder darum, die gegebene Figur symmetrisch zu ergänzen. Dahinter steckt die Wechselseitigkeit der Spiegelvorschrift.

Wir greifen den Urpunkt P mit der Zughand und verschieben ihn auf der Zeichenebene (Bildschirm). Man sieht: Im Falle, daß P ein Punkt der Geraden AA' oder der Parallelen zu a durch A ist, versagt die Konstruktion. Dann muß man

- zunächst einen Hilfspunkt B wählen, die Geraden AB und BP zeichnen und B so verschieben, daß <u>beide</u> Geraden die Spiegelgerade auf dem Zeichenblatt schneiden,
- den Bildpunkt B' mit der Lineal-Vorschrift, bezogen auf A und A' konstruieren, und dann

- den Bildpunkt P' mit der Lineal-Vorschrift, bezogen auf B und B' konstruieren.

Die Lineal-Vorschrift läßt sich, sofern man keinen Hilfspunkt B benötigt, ohne weiteres als **Makro Linealvorschrift** definieren, da alle Konstruktionsschritte eindeutig sind. Benötigt man einen Hilfspunkt, so wendet man das Makro zweimal nacheinander an.

Vier Vorschriften - Eine Abbildung

Es soll eine Urfigur mit einer der vier Vorschriften gespiegelt werden. Dann sollen alle für die Vorschrift benötigten Linien ausradiert *("Radiergummi")* werden und nur die Ur- und Bildfigur sichtbar bleiben. Niemand kann an Hand der beiden Figuren erkennen, welche der vier Vorschriften zum Spiegeln benutzt wurde. Denn alle vier Vorschriften liefern zu jedem Urpunkt als Ergebnis stets ein und denselben Bildpunkt. Wir sagen: Die vier Vorschriften sind **ergebnisgleich.** Alle ergebnisgleichen Vorschriften liefern dieselbe **Abbildung** von Ur- und Bildpunkt, wir nennen sie **Geradenspiegelung.**

Zum Konstruieren des Bildpunktes ist es also gleichgültig, welche der ergebnisgleichen Vorschriften man benutzt, man erhält immer dieselbe Abbildung. Gewöhnlich verwendet man die Geodreieck-Vorschrift bzw. das Makro Geradenspiegeln, es ist die **Standardvorschrift** der Geradenspiegelung. - Würde man auch noch die Spiegelgerade ausradiert haben, so könnte man sie rekonstruieren: Sie ist die Mittelsenkrechte der Verbindungsstrecke beider Punkte *("Mittelsenkrechte")*.

Die Streifentreue der Geradenspiegelung

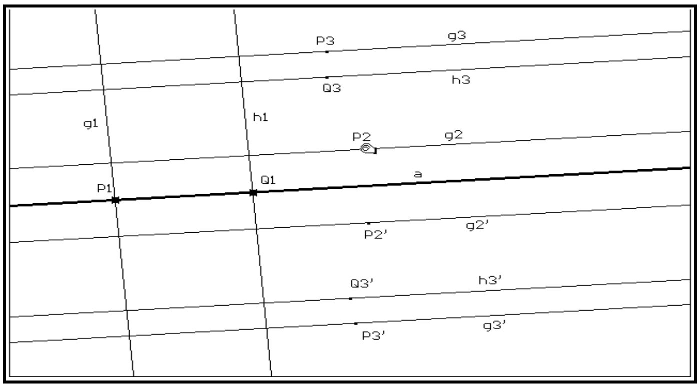
Wir haben bisher schon viele Eigenschaften der Standardvorschrift kennengelernt (Fixeigenschaften, Geradentreue, Kreistreue, ...). Alle zu ihr ergebnisgleichen Vorschriften haben naturgemäß diese selben Eigenschaften. Es sind also nicht nur Eigenschaften einer einzigen Vorschrift, sondern Eigenschaften der Geradenspiegelung (der Abbildung).

Streifen: Von zwei sich schneidenden Geraden (bzw. zwei von einem Punkt ausgehenden Halbgeraden) berandete Flächenstücke kennen wir unter der Bezeichnung "Winkel". Wir haben Winkel an einer Geraden gespiegelt und dabei festgestellt, daß die Geradenspiegelung winkeltreu ist. Von zwei parallelen Geraden berandete Flächenstücke nennt man **Streifen**. Auch bei ihnen fragen wir nach ihrem Bild bei der Geradenspiegelung (die wir durch ihre Standardvorschrift repräsentieren).

Streifen parallel und senkrecht zur Spiegelgeraden

Zuerst zeichnen wir Streifen, deren Randgeraden parallel oder senkrecht zur Spiegelgeraden sind. Wie wir dabei sehen, gibt es sogar Fixstreifen:

- Alle Streifen senkrecht zur Spiegelgeraden sind Fixstreifen.
- Alle Streifen, deren Randgeraden parallel und symmetrisch zur Spiegelgeraden liegen, sind Fixstreifen.



Wir greifen die Punkte P und Q, durch die die Senkrechten bzw. Parallelen verlaufen, mit der Zughand und verschieben damit die Randgeraden parallel. Auf diese Weise wird die Streifenbreite verändert, doch werden die **Urstreifen** stets wieder auf (sogar gleichbreite, also <u>kongruente</u>!) Streifen, die **Bildstreifen**, abgebildet.

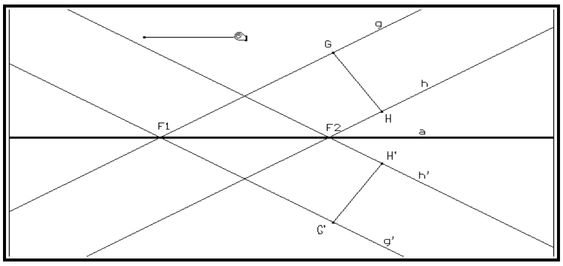
Streifen weder senkrecht noch parallel zur Spiegelgeraden

Schließlich bilden wir einen Streifen ab, dessen Randgeraden weder senkrecht noch parallel zur Spiegelgeraden verlaufen.

(1) Die Spiegelgerade a zeichnen *("Gerade")*
(2) Die Randgerade g des Urstreifens konstruieren:
- Einen Punkt auf a legen *("Punkt auf Objekt")* und F1 nennen
- Eine Gerade g durch F1 und einen weiteren Punkt G zeichnen *("Gerade durch 2 Punkte")*

(3) Den Abstand der Randgeraden g und h des Urstreifens festlegen:
- Die Senkrechte in G auf g konstruieren *("Lot/Senkrechte")*
- Eine Strecke zeichnen *("Strecke")*
- Einen Richtungspunkt R auf die Senkrechte legen *("Punkt auf Objekt")* und die Strecke von G aus in Richtung R übertragen *(Makro Streckenübertragung)*, den Endpunkt H nennen, Senkrechte und Richtungspunkt R ausradieren *("Radiergummi")*

(4) Die Randgerade h des Urstreifens konstruieren: Die Parallele durch H zu g konstruieren *(Parallele")*
(5) Die Bilder der Geraden g und h und der Abstandsstrecke [GH] konstruieren:
- Den Fixpunkt der Geraden h konstruieren *("Schnitt")* und F2 nennen
- Die Geraden g und h an a spiegeln *(Makro Geradenspiegeln-Gerade)*
- Die Punkte G und H an a spiegeln *(Makro Geradenspiegeln)* und G' bzw H' nennen,
  die Strecke [G'H'] zeichnen



Wegen der Längentreue der Geradenspiegelung ist |G'H'|=|GH|, das Bild des Urstreifens mit den Randgeraden g und h ist also wieder ein Streifen (der Bildstreifen) mit den Randgeraden g' und h'. Ur- und Bildstreifen sind sogar <u>kongruent</u>.

Die <u>Parameter</u>, mit deren Hilfe wir die Figur verändern können, sind die Länge der Abstandsstrecke (Endpunkt der gegebenen Strecke mit der Zughand greifen und ziehen) und die Randgerade g (den Punkt G mit der Zughand greifen und die Gerade um F1 drehen). Als <u>Sonderfälle</u> erhält man die Fixstreifen senkrecht zur Spiegelgeraden. Die Streifen parallel zur Spiegelgeraden erhält man nur dann als Sonderfälle, wenn man F1 von a und F2 von a und h löst ("Verbindung aufheben"), anschließend F2 an h bindet ("Objektbindung eines Punktes") und außer G jetzt auch F1 mit der Zughand greift und variiert.

Die Geradenspiegelung bildet Streifen auf kongruente Streifen ab. Wir sagen: **Die Geradenspiegelung ist <u>streifentreu</u>.**

Statt von Streifentreue spricht man auch von **<u>Parallelentreue</u>:** Parallele Urgeraden g||h werden auf parallele Bildgeraden g'||h' abgebildet.