

Drehen um einen Punkt

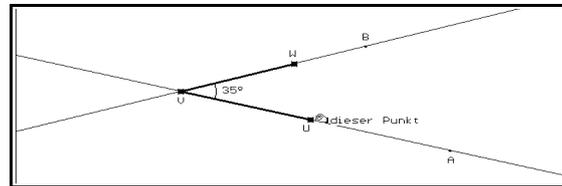
DIE DREHVORSCHRIFT

Drehwinkel haben eine Winkelweite und einen Drehsinn (eine Orientierung). Der Drehsinn kann generell festgelegt werden ("Alle Drehwinkel sind im Gegenuhrzeigersinn orientiert"), er kann aber auch freigestellt sein (Uhrzeigersinn und Gegenuhrzeigersinn). Im zweiten Fall muß die Orientierung des Drehsinns gekennzeichnet werden. Dies kann durch ein Vorzeichen ("+" für den Gegenuhrzeigersinn, "-" für den Uhrzeigersinn) oder auch dadurch geschehen, daß man drei den Drehwinkel definierende Punkte im Sinne der gewählten Orientierung nacheinander mit U, V und W (Scheitel V) bezeichnet.

Das starre Korsett grundsätzlich linksorientierter Drehwinkel führt beim Cabri Géomètre (und nicht nur hier) zu zusätzlichen Schwierigkeiten. Beim Cabri Géomètre insbesondere deshalb, weil überstumpfe Winkel nicht markiert und damit auch nicht gemessen werden können, man sich also auf Drehwinkel bis 180 Grad beschränken muß. Viel einfacher und natürlicher ist es, beim Cabri Géomètre (und nicht nur hier!) beide mögliche Orientierungen des Drehwinkels zuzulassen und die Orientierung in jedem Einzelfall durch die Reihenfolge der Punkte U-V-W anzugeben. Auf diese Weise wird im Folgenden verfahren.

Die Unabhängigkeit der Winkelweite von den Streckenlängen $|UV|$ und $|VW|$ kann man so zeigen:

- (1) Zwei sich schneidende Geraden "durch 2 Punkte" A und V bzw. B und V zeichnen.
- (2) Je einen Punkt U bzw. W auf die Geraden legen (gegebenfalls die Strecken $[UV]$ bzw. $[VW]$ zeichnen)
- (3) Den Winkel UVW markieren und messen.



Die Punkte U und/oder W mit der Zughand greifen, auf den Geraden wandern lassen und die Winkelweite (Maßzahl) beobachten. Man stellt fest: Sie bleibt unverändert.

Auch die Winkelweite variieren (A und/oder B greifen) und den Versuch wiederholen.

Geht es allerdings beim Cabri Géomètre nur darum, den Drehwinkel stetig zu verändern, so kann man ihn ohne weiteres über die 180 Grad hinaus, also zwischen 0 Grad bis 360 Grad (Vollrotation) variieren. Darauf wird nicht immer ausdrücklich hingewiesen.

Die Drehvorschrift hat im Gegensatz zur Spiegelvorschrift zwei Parameter, den Drehpunkt und den Drehwinkel. Beide müssen unabhängig von der abzubildenden Figur frei variierbar sein, deshalb muß der Drehwinkel separat gezeichnet und mit "Winkelübertragen" in die jeweilige Konstruktion eingefügt werden. Damit lautet die **Drehvorschrift**:

- (1) Den Drehpunkt D zeichnen ("Punkt")
Den Drehwinkel UVW zeichnen ("Strecken" $[UV]$ und $[VW]$, "Winkelmarkierung", "Messung"),
U oder W greifen und einen Schenkel so drehen, daß die vorgegebene Winkelweite angezeigt wird

Anmerkung: Um anzudeuten, daß es sich bei den Schenkeln um Halbgeraden handelt, kann man die Punkte U und W ausradiieren ("Radiergummi"). Dann kann man aber später U und W nicht mehr mit der Zughand greifen um die Winkelweite zu verändern.

(2) Den Ursprung P zeichnen ("Punkt")

(3) Den Bildpunkt von P so konstruieren:

- Kreis um D durch P zeichnen ("Kreis aus Kreismittelpunkt und Kreispunkt")
- Den Winkel UVW (U-V-W anklicken), an PD (P-D anklicken, also D als Scheitel) übertragen ("Winkelübertragung"), ergibt den freien Schenkel dieses Winkels
- Kreis und freien Schenkel schneiden ("Schnitt")

(4) Denjenigen Schnittpunkt mit P' bezeichnen, für den der Winkel PDP' gleichorientiert zum Winkel UVW ist. Er ist der Bildpunkt P' von P.

Den anderen Schnittpunkt ausradiieren (Radiergummi).

Wir variieren die Parameter der Abbildungsvorschrift und beobachten dabei den Bildpunkt P':

- Den Drehpunkt D mit der Zughand greifen und auf der Ebene frei wandern lassen.
- Den Punkt U oder W mit der Zughand greifen und den Drehwinkel verändern.
- Auch den Ursprung P greifen und auf der Zeichenebene frei wandern lassen

Aus der Drehvorschrift leiten wir das **Makro Drehen** ab:

Eingabeobjekte:	Drehpunkt D, Drehwinkel UVW (die vier Punkte in dieser Reihenfolge), Ursprung P
Zielobjekt:	Bildpunkt P'

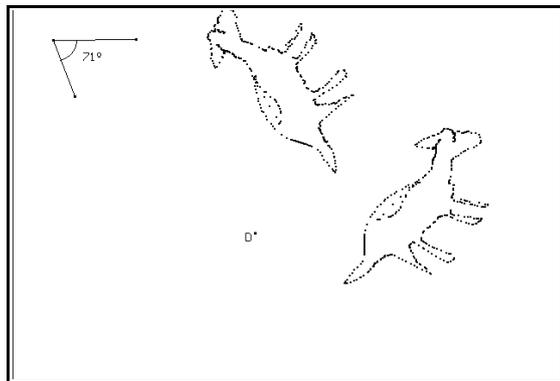
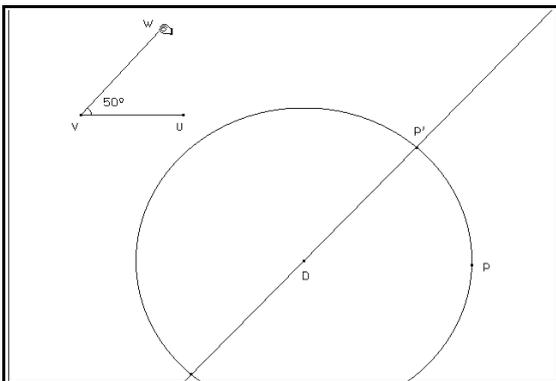
Wir können auch freihandzeichnen, wozu wir diese Abbildungsvorschrift befolgen:

(1) Den Drehpunkt D und Drehwinkel zeichnen

Den Ursprung P zeichnen

(2) Den Bildpunkt konstruieren (*Makro Drehen*)

(3) Die Option Ortslinie aufrufen, die Shift-Taste drücken und Ursprung und Bildpunkt anklicken, den Ursprung mit der Zughand greifen und auf der Zeichenebene frei wandern lassen. Wir erhalten eine Ur- und eine Bildfigur.



EIGENSCHAFTEN DER DREHVORSCHRIFT

- Den Ursprung P greifen und auf der ganzen Zeichenebene (Bildschirm) wandern lassen. Auch P' wandert auf der Zeichenebene. Die Drehvorschrift bildet die Zeichenebene auf sich ab.
- Liegt der Ursprung P auf dem Drehpunkt D, so liegt auch der Bildpunkt P' auf eben diesem Punkt. Der Drehpunkt ist der einzige Fixpunkt der Drehvorschrift.
- Die Gerade PD einzeichnen ("Gerade durch 2 Punkte"), sie ist die Urgerade zur Bildgeraden P'D. Den Drehwinkel stetig verändern. Für alle Winkel (außer 360 Grad und 180 Grad) sind PD und P'D zwei verschiedene Geraden.

Für die Drehwinkel von 360 Grad und 180 Grad sind PD und P'D dieselbe Gerade. "Drehen um 360 Grad" und "Drehen um 180 Grad" haben demnach mindestens eine von "Drehen um Winkel außer 360 Grad und 180 Grad" wesentlich verschiedene Eigenschaft. Deshalb unterscheiden wir die beiden ersten von der dritten Vorschrift, die wir kurz **Drehen** nennen. Sie ist die Standardvorschrift der Abbildung, die **Drehung** genannt wird.

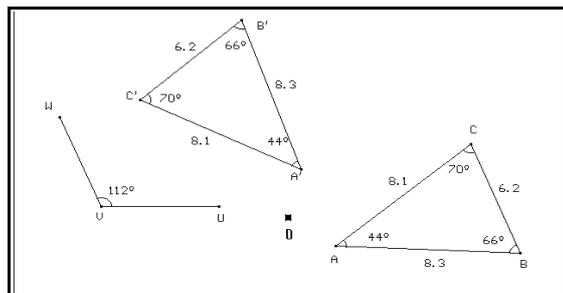
"Drehen um 360 Grad" ist eine Vorschrift der identischen Abbildung. Die Vorschrift "Drehen um 180 Grad" werden wir für später im Gedächtnis behalten.

Damit können wir jetzt sagen: Die Drehvorschrift hat keine Fixgeraden.

DREHEN IST EINE KONGRUENZVORSCHRIFT

Wir verwenden das Makro Drehen, um das **Makro Drehen-Dreieck** zu definieren. Zunächst die Abbildungsvorschrift:

- (1) Den Drehpunkt D und den Drehwinkel UVW zeichnen
- (2) Das Urdreieck ABC zeichnen
- (3) Das Bilddreieck so konstruieren:
Die Eckpunkte des Urdreiecks einzeln drehen (*Makro Drehen*), die Bildpunkte A', B', C' nennen
- (4) Das Dreieck A'B'C' zeichnen ("*Dreieck*").



Aus der Abbildungsvorschrift ergibt sich das

Makro Drehen-Dreieck:

- | | |
|-----------------|--|
| Eingabeobjekte: | Drehpunkt D, Drehwinkel UVW, Urdreieck ABC |
| Zielobjekt: | Bilddreieck A'B'C' |

Wir variieren die Parameter stetig:

- den Drehwinkel um eine Volldrehung (W mit der Zughand greifen)
- den Drehpunkt (innerhalb/außerhalb des Urdreiecks, auf einer Seite/in einer Ecke)

Außerdem Seitenlängen und Eckenwinkel (zuerst markieren!) von Ur- und Bilddreieck messen. Dabei beobachten wir: Jede Bildstrecke ist so lang wie ihre Urstrecke, jeder Bildwinkel ist so groß

wie sein Urwinkel, jedes Bilddreieck hat deshalb auch dieselbe Gestalt und Größe wie sein Urdreieck. **Die Drehvorschrift ist also längentreu und winkeltreu**, sie bildet Dreiecke auf kongruente Dreiecke ab. **Die Drehvorschrift ist eine Kongruenzvorschrift**. (Die Geradentreue setzen wir anschaulich voraus.)

DREHSYMMETRISCHE FIGUREN

Es sollen Figuren gezeichnet werden, die man durch Drehen auf sich selbst abbilden kann. (**Deckabbildung**). Man nennt sie **drehsymmetrische Figuren**. Wir beginnen damit, eine drehsymmetrische Figur aus Dreiecken zu zeichnen, und wählen als Drehwinkel 60 Grad.

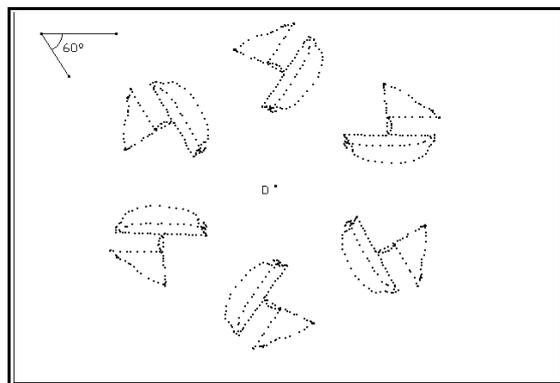
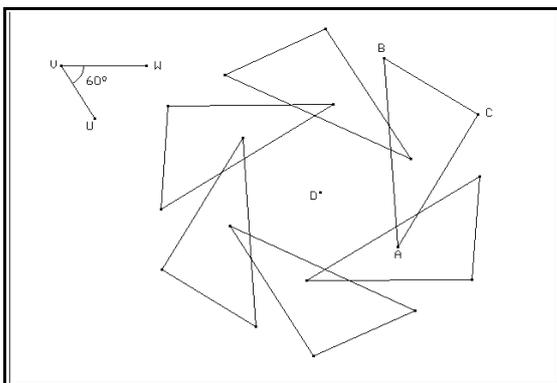
- (1) Den Drehpunkt D und den Drehwinkel UVW zeichnen
- (2) das Urdreieck ABC zeichnen
- (3) Die drehsymmetrische Figur so konstruieren:
 - Das Urdreieck um D drehen (*Makro Drehen-Dreieck*)
 - Die folgenden Anweisungen 4mal nacheinander durchführen:
 - (a) Das Bilddreieck als Urdreieck auffassen
 - (b) Das Urdreieck um D drehen (*Makro Drehen-Dreieck*)

In der Anweisung (3) ist eine **Zählschleife (for-Schleife)** eingebaut. Statt dessen hätte man auch eine Solange-Schleife (While-Schleife) oder eine Wiederhole-Schleife (Repeat-Schleife) formulieren können.

Die Figur besteht aus 6 Dreiecken. Sie wird durch Drehen um Vielfache von 60 Grad auf sich abgebildet, ist also drehsymmetrisch. Die Ecken des Urdreiecks mit der Zughand greifen und das Dreieck (und damit die ganze Figur) variieren, z.B. eine Ecke in den Drehpunkt legen,.....

Auch durch Freihandzeichnen können drehsymmetrische Figuren hergestellt werden. Dazu ersetzen wir in der Konstruktionsvorschrift "Dreieck" durch "Punkt" und fügen eine weitere Anweisung hinzu:

- (4) Die Option ORTSLINIE aufrufen, die Shift-Taste drücken und nacheinander den Ursprung und alle Bildpunkte anklicken, den Ursprung mit der Zughand greifen und mit dem Freihandzeichnen beginnen.



Regelmäßige Vielecke

Wir führen die Konstruktionsvorschrift für drehsymmetrische Figuren noch einmal durch. Dabei soll der Drehwinkel 30 Grad weit sein, es soll ein Punkt abgebildet werden und bei der Zählschleife soll bis 10 gezählt werden. Zuletzt soll als weitere Anweisung hinzugefügt werden:

|| (4) Benachbarte Punkte durch Strecken verbinden. Es entsteht ein **regelmäßiges 12Eck**.

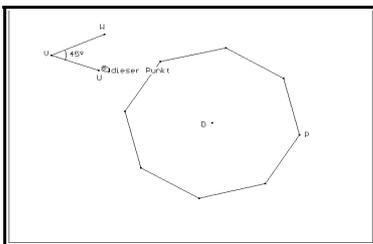
Jetzt den Punkt U oder W des Drehwinkels UVW mit der Zughand greifen und den Winkel stetig bis 180 Grad vergrößern. Dabei beobachten wir sich stetig verändernde regelmäßige und unregelmäßige Vielecke, die einander abwechseln. Wir notieren die regelmäßigen Vielecke und die Drehwinkel, bei denen sie auftreten:

Drehwinkel-Weite	30	45	60	72	90	120	180	Grad
regelmäßiges.....	12Eck	8Eck	6Eck	5Eck	4Eck	3Eck	2Eck	

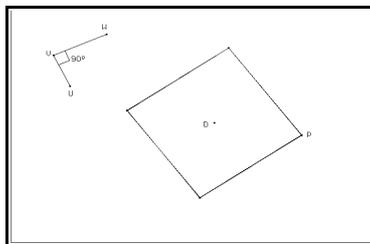
Zu jedem Teiler von 360 Grad gibt es ein regelmäßiges Vieleck (zu 15 Grad gibt es das 24Eck). Das Produkt aus Eckenzahl und Drehwinkel-Weite ist immer 360 Grad. Alle regelmäßigen Vielecke sind drehsymmetrisch, die Drehwinkel-Weiten der Deckabbildungen sind Vielfache der in der Tabelle angegebenen Weiten.

Für Drehwinkel, deren Weiten nicht Teiler von 360 Grad sind, gibt es keine regelmäßigen Figuren.

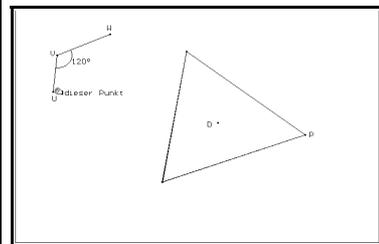
Hier sind drei Momentaufnahmen abgebildet, die beim stetigen Vergrößern des Drehwinkels festgehalten wurden:



Der Drehwinkel ist 45 Grad groß.
Es entsteht ein regelmäßiges Acht-
eck.



Der Drehwinkel ist 90 Grad groß.
Es entsteht ein regelmäßiges Viereck
(**Quadrat**).



Der Drehwinkel ist 120 Grad groß.
Es entsteht ein regelmäßiges Dreieck
(**gleichseitiges Dreieck**)

Ein Makro "Quadrat" werden wir später definieren. Jetzt soll für das gleichseitige Dreieck ein Makro definiert werden. Dazu benötigen wir zuerst eine Konstruktionsvorschrift:

- || (1) Zwei Punkte A und B ("Punkt") zeichnen
 || (2) Den Punkt C konstruieren:
 || - Die Kreise um A durch B und um B durch A zeichnen ("Kreis aus Kreismittelpunkt und Kreispunkt")
 || - Beide Kreise schneiden ("Schnitt"). Denjenigen der beiden Schnittpunkte mit C bezeichnen, für den die Punkte A,B,C eine Linksschraube bilden. (Man kann natürlich auch eine Rechtsschraube wählen.)
 || (3) Das Dreieck ABC markieren ("Dreieck")

Daraus leiten wir das **Makro gleichseitiges Dreieck** ab:

Eingabeobjekte: Eckpunkte A und B
Zielobjekt: Dreieck ABC (Es ist im Gegenuhrzeigersinn orientiert)

EINE GERADE UM EINEN PUNKT DREHEN

Die Strategie beim Drehen einer Geraden ist dieselbe wie beim Spiegeln: Man muß das Abbilden von Geraden auf das Abbilden von 2 Punkten der Geraden zurückführen.

- (1) Drehpunkt D und Drehwinkel UVW zeichnen. Drehwinkel markieren und messen.
- (2) Urgerade g zeichnen ("Gerade")
- (3) Die Bildgerade so konstruieren:
 - Zwei Punkte A und B auf die Urgerade legen ("Punkt auf Objekt")
 - Die Punkte A und B um D drehen (Makro Drehen), die Bildpunkte A' und B' nennen
 - Die Gerade durch A' und B' zeichnen ("Gerade durch 2 Punkte") und mit g' bezeichnen.Sie ist die Bildgerade zu g.

Die Parameter variieren: Den Drehpunkt D greifen und variieren, z.B. auch auf die Urgerade legen. Den Drehwinkel stetig um eine Voldrehung verändern. Auch die Urgerade verschieben.

Das **Makro Drehen-Gerade** lautet dann:

Eingabeobjekte: Drehpunkt D, Drehwinkel UVW, Punkte A und B der Urgeraden g (in dieser Reihenfolge)
Zielobjekt: Bildgerade g'

Dieses Makro ist auch auf "Gerade durch 2 Punkte" anwendbar. Man braucht dann nicht eigens zwei Punkte auf die Urgerade zu legen.

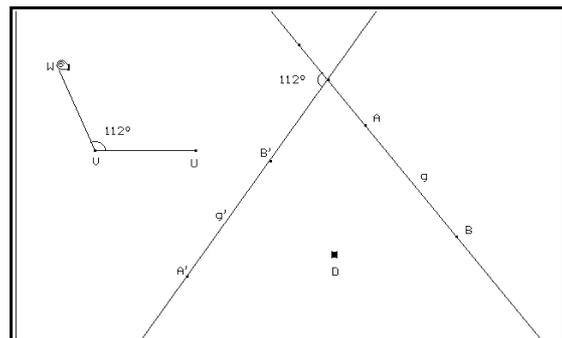
Zuletzt markieren und messen wir den Winkel von g nach g' (zuvor g und g' schneiden), variieren den Drehwinkel und fragen nach einer Beziehung zwischen dem markierten Schnittwinkel und dem Drehwinkel. Durch Verschieben der Urgeraden kann man die beiden Fälle $D\hat{=}g$ und $D\hat{=}g'$ unterscheiden. Verändert man den Drehwinkel stetig von 0 Grad bis 360 Grad, so beobachtet man:

Der Winkel, den Urgerade g und Bildgerade g' (in dieser Reihenfolge) miteinander bilden, ist nach Größe und Orientierung gleich dem Drehwinkel.

Für den Drehwinkel 180 Grad sind Ur- und Bildgerade parallel. Das wollen wir uns für später merken.

DREHVORSCHRIFTEN DURCH EIN GERADENPAAR G, G' FESTLEGEN

Aufgabe: Gegeben ist ein Geradenpaar g, g' ("Gerade"). Gesucht sind alle Drehvorschriften, die g auf g' abbilden.



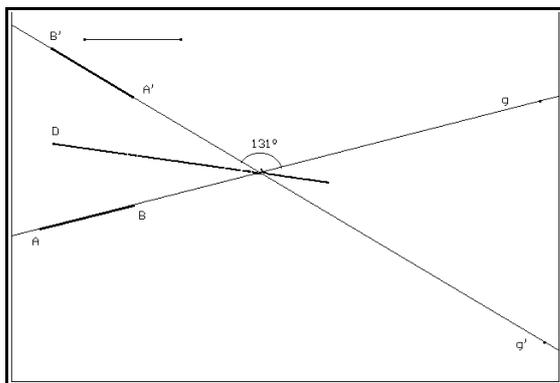
Lösungsstrategie: Die Drehwinkel aller Vorschriften, die g auf g' abbilden, sind so groß wie der (orientierte) Winkel zwischen g und g' . Es gibt je nach Orientierung zwei solche Winkel, sie sind Nebenwinkel zueinander. Der Drehpunkt hängt von der Wahl der Punkte A, B auf g und A', B' auf g' ab, die man für das Makro Drehen-Gerade benötigt und die, abgesehen von der durch die Längentreue bedingten Beziehung $|A'B'|=|AB|$ auf g bzw. g' frei wählbar sind. Weil Ur- und Bildpunkte A, A' bzw. B, B' gleichweit vom Drehpunkt D entfernt sind, liegt D also auf der Mittelsenkrechten von $[AA']$ und $[BB']$ und ist damit ihr Schnittpunkt. Gesucht ist die Ortslinie des Drehpunktes, wenn die Strecke $[AB]$ auf g oder $[A'B']$ auf g' wandert.

Man kann diese Ortslinien-Aufgabe auch in eine technische Form einkleiden:

Technische Formulierung der Aufgabe: Gegeben sind zwei sich kreuzende Schienen g und g' , auf denen gleichlange Stangen $[AB]$ bzw. $[A'B']$ frei verschieblich sind. Die Mittelsenkrechten der Verbindungsstrecken $[AA']$ und $[BB']$ sind in einem Punkt D durch ein Gelenk verbunden. Welchen Weg legt D zurück, wenn $[AB]$ auf g und/oder $[A'B']$ auf g' verschoben wird?

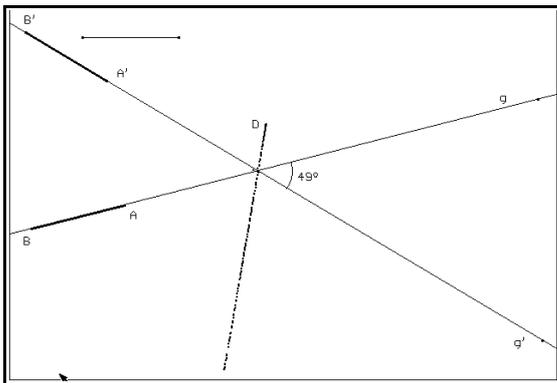
Die Konstruktionsvorschrift lautet:

- (1) Zwei Schienen g und g' zeichnen ("Gerade")
- (2) Eine Vergleichsstrecke s zeichnen ("Strecke")
- (3) Die Stangen der Länge $|s|$ auf g und g' legen:
 - Einen Punkt A auf g und einen Punkt A' auf g' legen ("Punkt auf Objekt")
 - An den Rand des Bildschirms je einen Richtungspunkt auf g und auf g' legen ("Punkt auf Objekt"), die Strecke s von A und von A' aus in Richtung der Richtungspunkte übertragen (Makro Streckenübertragung), die Endpunkte B bzw. B' nennen
 - Die Strecken $[AB]$ und $[A'B']$ zeichnen
- (4) Den Punkt D konstruieren:
 - Die Mittelsenkrechten von $[AA']$ und $[BB']$ konstruieren (Makro Mittelsenkrechte)
 - Die beiden Mittelsenkrechten schneiden ("Schnitt"), den Schnittpunkt D nennen.
- (5) Die Option ORTSLINIE aufrufen, den Punkt A greifen und auf g wandern lassen.



Die Drehpunkte liegen auf der Halbierenden seines Nebenwinkels.

Die Reihenfolge der Punkte A, B auf g bzw. A', B' auf g' gibt die Orientierung der Geraden g bzw. g' an. Der Drehwinkel ist im Gegenuhrzeigersinn orientiert.



Die Orientierung der Geraden g wurde umgekehrt, indem die Reihenfolge von A und B vertauscht wurde. Der Drehwinkel ist im Uhrzeigersinn orientiert. Die Drehpunkte liegen wieder auf der Halbierenden seines Nebenwinkels.

Zu zwei gegebenen Geraden g, g' gibt es also beliebig viele Drehvorschriften, die die eine auf die andere Gerade abbilden. Ihr Drehwinkel ist der orientierte Winkel von g nach g' . Ihre Drehpunkte liegen auf der Halbierenden seines Nebenwinkels.

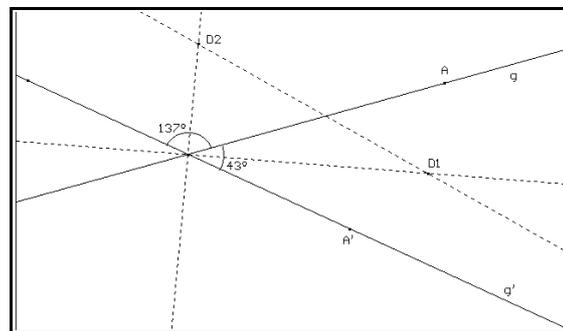
Gibt man außer den Geraden g und g' noch je einen Punkt A auf g und A' auf g' fest vor, so bleiben die Punkte B und B' und damit die gegenseitige Orientierung der beiden Geraden noch frei wählbar. Gibt man schließlich auch noch die Punkte B auf g und B' auf g' vor, so ist die Orientierung der Geraden festgelegt und es gibt nur noch genau eine Vorschrift, die g auf g' abbildet.

Eine Drehvorschrift ist eindeutig bestimmt durch Vorgabe eines Geradenpaares g, g' mit dem Punkten A, B auf g und A', B' auf g' und $|AB|=|A'B'|$.

ZWEI AUFGABEN: DREHVORSCHRIFTEN KONSTRUIEREN

Aufgabe: Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden g, g' mit zwei Punkten A auf g und A' auf g' . Zu konstruieren ist die Drehvorschrift (Drehpunkt, Drehwinkel), die g auf g' und dabei A auf A' abbildet.

Lösung: Der Drehpunkt liegt auf der Mittelsenkrechten von $[AA']$ und auf einer Halbierenden der von g und g' gebildeten Winkel, ist also der Schnittpunkt dieser beiden Ortslinien. Es gibt 2 mögliche Drehvorschriften je nachdem, ob man die Drehung im Gegenuhrzeigersinn (hier im Beispiel D_1 , 137 Grad) oder im Uhrzeigersinn (D_2 , 43 Grad) durchführen will. Gibt man noch den Drehsinn der gesuchten Vorschrift vor, so ist die Lösung eindeutig.

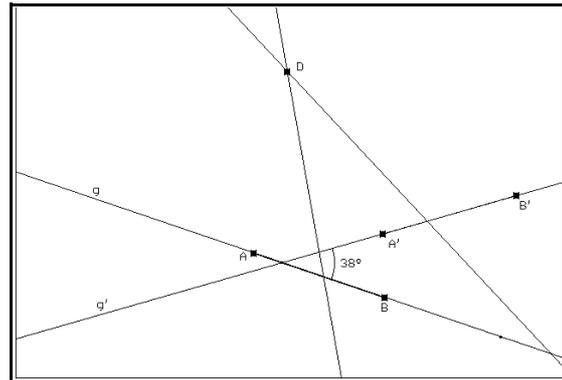


Den Punkt A oder A' mit der Zughand greifen und auf g bzw. g' wandern lassen. Sonderfall: Sind A und A' gleichweit vom Schnittpunkt der Geraden g und g' entfernt, so gibt es genau einen

Drehpunkt, nämlich diesen Schnittpunkt. Der Drehwinkel beträgt dann bei unserem Beispiel im Uhrzeigersinn 43 Grad, im Gegenuhrzeigersinn die Ergänzung zu 360 Grad.

2. Aufgabe: Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden g, g' und die Punkte A, B auf g und A', B' auf g' mit $|A'B'| = |AB|$. Gesucht ist die Drehvorschrift (Drehpunkt, Drehwinkel), die g auf g' und dabei A auf A' und B auf B' abbildet.

- (1) Zwei Geraden g, g' zeichnen ("Gerade")
- (2) Die vier Punkte zeichnen:
 - Die Punkte A, B auf g und den Punkt A' auf g' beliebig zeichnen ("Punkt auf Objekt")
 - Die Strecke $[AB]$ zeichnen ("Strecke")
 - Einen Richtungspunkt R auf g' legen ("Punkt auf Objekt"). Von A' aus gesehen gibt es dafür zwei mögliche Richtungen. Entscheidet man sich für eine von beiden, so ist die Lösung eindeutig.
 - Die Strecke $[A'B']$ von A' aus in Richtung R übertragen (*Makro Streckenübertragung*), den Endpunkt B' nennen
- (3) Den Drehpunkt D konstruieren:
 - Die Mittelsenkrechten von $[AA']$ und $[BB']$ konstruieren und schneiden, den Schnittpunkt D nennen
- (4) Den Drehwinkel markieren:
 - g und g' schneiden. Den Nebenwinkel zum Winkel, in dem D liegt, markieren und messen. Dieser von g nach g' orientierte Winkel ist der Drehwinkel.

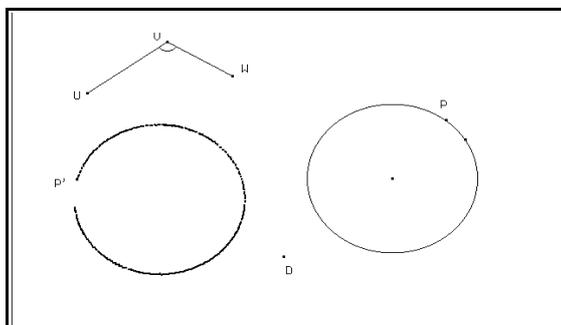


EINEN KREIS DURCH EINE DREHVORSCHRIFT ABBILDEN

Wir suchen das Bild eines Kreises beim Drehen um einen Punkt und verwenden dazu die zweischrittige Ortslinien-Strategie.

Im ersten Schritt konstruieren wir die Ortslinie, die entsteht, wenn ein Punkt P auf einem Kreis umläuft. Dabei wollen wir aber (wie schon beim Spiegeln eines Kreises) nicht nur das Endprodukt (die Ortslinie), sondern auch den Vorgang ihres Entstehens beobachten.

- (1) Drehpunkt D und Drehwinkel UVW zeichnen
- (2) Den Urkreis k zeichnen ("Kreis")
- (3) Die Ortslinie so konstruieren:
 - Einen Punkt P auf den Kreis legen ("Punkt auf Objekt")
 - Den Punkt P abbilden (*Makro Drehen*), den Bildpunkt P' nennen
 - Die Option **ORTSLINIE** aufrufen, P' anklicken, P greifen und auf k wandern lassen.



Wir vermuten, daß die Bildfigur wieder ein

Kreis k' ist, daß der Mittelpunkt von k' das Bild des Mittelpunktes von k ist und daß beide Kreise den gleichen Radius haben. Das bestätigen wir im 2. Schritt:

(4) Den Kreis k' so konstruieren:

- Den Mittelpunkt M von k konstruieren (*Kreismittelpunkt*), einen Punkt A auf k legen (*"Punkt auf Objekt"*)
- Die Punkte M und A abbilden (*Makro Drehen*), die Bildpunkte M' bzw. A' nennen
- Den Kreis um M' durch A' zeichnen (*"Kreis aus Kreismittelpunkt und Kreispunkt"*)

(5) Die Option ORTSLINIE noch einmal aufrufen, P' anklicken, P greifen und wandern lassen.

Wir sehen: Der konstruierte Kreis k' und die mit der Option Ortslinie markierte Figur decken sich. Die Drehvorschrift bildet also Kreise auf Kreise ab. **Die Drehvorschrift ist kreistreu.**

Beobachten wir das Entstehen der Ortslinie, so finden wir außerdem: Bewegt sich der laufende Punkt P im Uhrzeigersinn, dann bewegt sich sein Bildpunkt P' ebenfalls im Uhrzeigersinn und umgekehrt. **Die Drehvorschrift ist orientierungstreu.**

Zuletzt soll noch das **Makro Drehen-Kreis** definiert werden:

Eingabeobjekte: Drehpunkt D , Drehwinkel UVW , Kreismittelpunkt M , Kreispunkt A
Zielobjekt: Bildkreis k'

Das Makro ist sowohl auf einen "Kreis" mit "Mittelpunkt" und "Punkt auf Objekt" als auch auf einen "Kreis aus Kreismittelpunkt und Kreispunkt" anwendbar.

Den Urkreis variieren: Alle konzentrischen Kreise um den Drehpunkt sind **Fixkreise**.

EINE AUFGABENFAMILIE

Die Aufgabenfamilie besteht aus einer Grundaufgabe mit zwei Variationen und einer Abwandlung der Grundaufgabe mit entsprechenden Variationen. Dabei wird die Drehvorschrift als Konstruktionsmittel eingesetzt.

Die Grundaufgabe: Gegeben sind ein Punkt A und zwei Geraden b und c . Gesucht ist ein gleichseitiges Dreieck, dessen eine Ecke A ist und dessen Ecken B und C auf b bzw. c liegen.

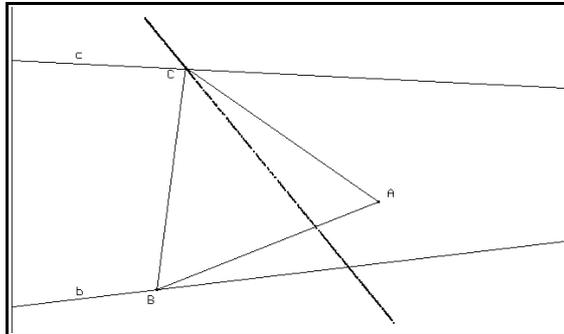
Lösungsstrategie: Bei allen **Inzidenz-Aufgaben** (das sind Aufgaben, bei denen Punkte an Objekte gebunden werden, "Objektbindung eines Punktes") geht man in der heuristischen Phase so vor, daß man zunächst eine der Inzidenzbedingungen wegläßt und mit dem Cabri Géomètre die Ortslinie für diesen dann freien Punkt konstruiert, wofür man eine zweite Inzidenzbedingung variabel gestaltet. (**Strategie für Inzidenzaufgaben**)

Für die vorliegende Aufgabe bedeutet das: Die Ecke A des gleichseitigen Dreiecks liegt fest, die Ecke B ist auf der Geraden b variabel und die Ecke C ist frei. Gefragt ist nach der Ortslinie für C , wenn B die Gerade b durchläuft. Wir konstruieren also zunächst:

- (1) Den Punkt A (*"Punkt"*) und die Geraden b und c (*"Gerade"*) zeichnen
- (2) Ein gleichseitiges Dreieck so konstruieren:
 - Einen Punkt auf b legen (*"Punkt auf Objekt"*) und B nennen

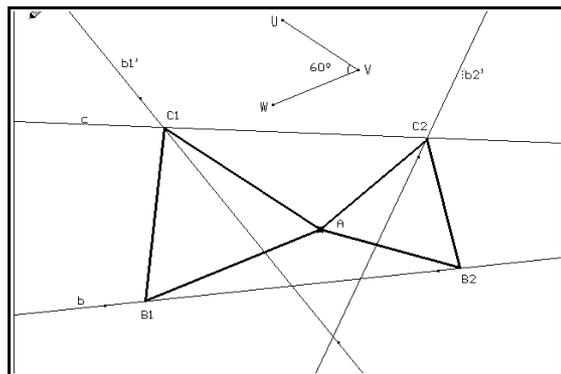
- Mit den Punkten A und B ein gleichseitiges Dreieck ABC zeichnen (*Makro gleichseitiges Dreieck*)
Es gibt 2 Möglichkeiten je nach der Reihenfolge, in der die Ecken A und B angeklickt werden.

Ruft man die Option ORTSLINIE auf, klickt den Punkt C an und greift den Punkt B, so stellt C den Bildpunkt von B bei Drehung um A mit 60 Grad (Eckenwinkel des gleichseitigen Dreiecks in A) dar. Dies gilt für jeden Punkt B auf b. Lässt man deshalb den Punkt B die Gerade b durchlaufen, so markiert C die Bildgerade b' von b beim Drehen um A mit 60 Grad.



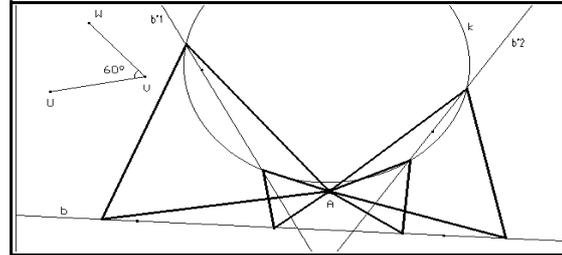
Daraus ergibt sich das Konstruktionsverfahren für C: Der Punkt C ist der Schnittpunkt der Geraden c und der Geraden b', die aus der Geraden b durch Drehen um 60 Grad um den Punkt A hervorgeht. Die Konstruktionsvorschrift lautet:

- (1) Den Punkt A und die Geraden b ("Gerade durch 2 Punkte") und c ("Gerade") zeichnen
- (2) Den Punkt C konstruieren:
 - Den Drehwinkel UVW von 60 Grad zeichnen
 - Die Gerade b um A mit 60 Grad drehen (*Makro Drehen-Gerade*)
Es gibt zwei Möglichkeiten, je nach dem Drehsinn des Drehwinkels (UVW und WVU anklicken), die Bildgeraden b1' und b2' nennen
 - Die Geraden b1' und b2' mit c schneiden ("*Schnitt*"), die Schnittpunkte C1 und C2 nennen
- (3) Die gleichseitigen Dreiecke (Lösungsdreiecke) und den Punkt B konstruieren
 - Gleichseitige Dreiecke mit den Ecken A und C1 bzw. C2 und A konstruieren (*Makro gleichseitiges Dreieck*)
 - Die dritten Eckpunkte B1 und B2 benennen.



Fallunterscheidung: Gerade b (Gerade durch 2 Punkte!) drehen. Schließen b und c einen 60-Grad-Winkel ein, so gibt es 1 Lösung, sonst gibt es stets 2 Lösungen.

Erste Variation der Grundaufgabe: Die Gerade c wird durch einen Kreis k ("Kreis") ersetzt. Gesucht sind alle gleichseitigen Dreiecke, deren eine Ecke der gegebene Punkt A ist und deren andere Ecken B auf b und C auf k liegen.

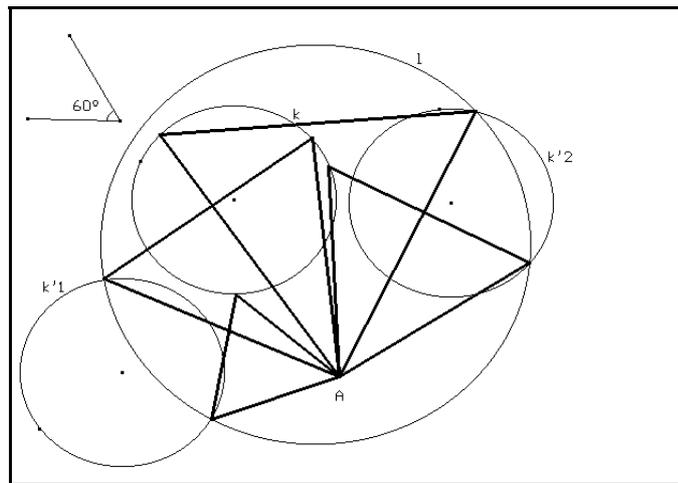


Die Lösungsstrategie ist dieselbe wie bei der Grundaufgabe.

Zur Fallunterscheidung variieren wir die Parameter b (drehen) und/oder k (verschieben). Wir sehen: Es kann 4, 3, 2, 1 oder kein Lösungsdreieck geben, je nachdem, ob die Geraden $b'1$ und/oder $b'2$ den Kreis k schneiden, berühren oder meiden.

Zweite Variation der Grundaufgabe: Die Geraden b und c werden durch Kreise k und l ersetzt. Gesucht sind alle gleichseitigen Dreiecke, deren eine Ecke der gegebene Punkt A ist und deren Ecken B und C auf k und l liegen.

Weil der Kreis k (um A mit 60° Grad in beiden Richtungen) gedreht werden muß, müssen der Kreismittelpunkt und ein Kreispunkt gegeben sein. Zum Drehen wird das Makro Drehen-Kreis benötigt.



Fallunterscheidung: Den Kreis k variieren und/oder den Kreis l verschieben. Es gibt 0, 1, 2, 3 oder 4 Lösungsdreiecke, je nachdem, ob die Kreise $k'1$ und/oder $k'2$ den Kreis k schneiden, berühren oder meiden.

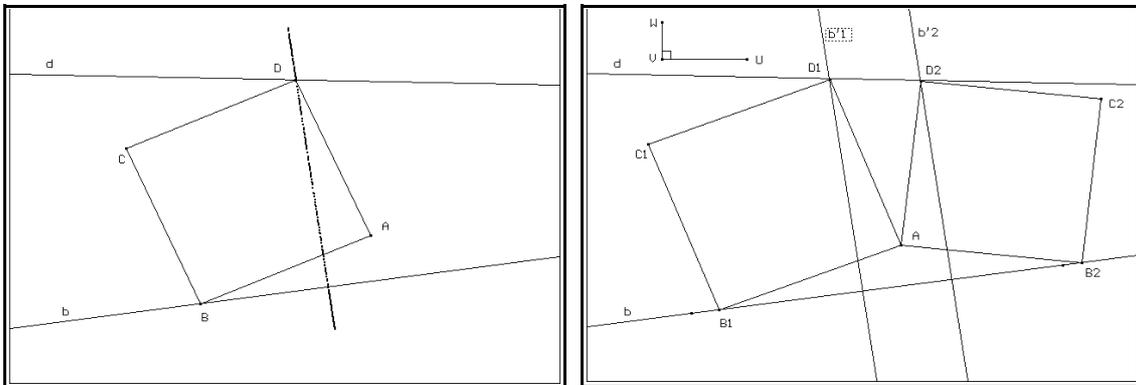
Abwandlung der Grundaufgabe: Statt für ein gleichseitiges Dreieck kann man die Grundaufgabe auch für ein Quadrat mit fester Ecke A und den Ecken B auf b und D auf d stellen.

Das variable Quadrat so konstruieren: Einen Punkt B auf b legen ("Punkt auf Objekt"), das Quadrat mit den Ecken A und B zeichnen (Makro Quadrat aus benachbarten Ecken).

Die Option ORTSLINIE aufrufen, den Punkt D anklicken, den Punkt B greifen und auf der Geraden b wandern lassen. Der Punkt D ist in Bezug auf den Punkt B der um 90° Grad gedrehte Bildpunkt. Die Ortslinie von D für den auf b laufenden Punkt B ist also die Bildgerade b' senkrecht zu b .

Zur Fallunterscheidung (Gerade d drehen!):

- Für $b^2 < d$ und $b^2 > d$ gibt es keine, für $b^2 = d$ beliebig viele Lösungs-Quadrate;
- sonst gibt es stets 2 Lösungs-Quadrate.



Diese abgewandelte Grundaufgabe kann natürlich auch wieder für Gerade und Kreis und für zwei Kreise umformuliert werden, das sind zwei weitere Aufgaben.

ZWEI AUFGABEN ZU KREISSEHNEN GEGEBENER LÄNGE

Erste Aufgabe: Gegeben ist ein Kreis k (Mittelpunkt M), ein Punkt P im Innern des Kreises und eine Strecke $[AB]$ gegebener Länge s . Gesucht sind alle Kreissehnen der Länge s , die durch P gehen.

Lösungsstrategie: Wir zeichnen zuerst eine beliebige Kreissehne $[A'B']$ der gegebenen Länge s , fixieren darauf einen dem Punkt P entsprechenden Punkt P' und drehen $[A'B']$ um P so, daß P' auf P abgebildet wird. Eine zweite Lösung ergibt sich aus Symmetriegründen am einfachsten durch Spiegeln an der Durchmessergeraden (Symmetrieachse) MP .

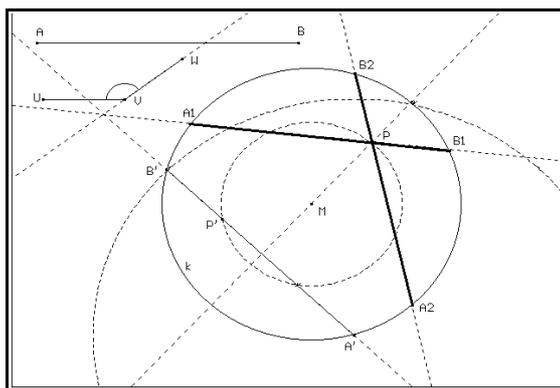
Die recht aufwendige Konstruktionsvorschrift, bei der wir jede Hilfslinie nach Gebrauch ausradieren, um die Übersicht zu behalten, lautet dann:

- (1) Den Kreis k zeichnen ("Kreis")
 - Den Punkt P im Innern des Kreises k zeichnen ("Punkt")
 - Eine Strecke $[AB]$ der gegebenen Länge s zeichnen ("Strecke")
- (2) Eine beliebige Kreissehne der Länge s so konstruieren:
 - Einen Punkt A' auf k legen ("Punkt auf Objekt")
 - Den Hilfskreis h_1 um A' mit Radius $|AB|$ zeichnen ("Kreis aus Kreismittelpunkt und Radius")
 - Die Kreise h_1 und k schneiden ("Schnitt"), einen der Schnittpunkte B' nennen
 - Strecke $[A'B']$ zeichnen ("Strecke"), sie ist die gesuchte beliebige Kreissehne.
 - Den Hilfskreis h_1 und den 2. Schnittpunkt von h_1 und k ausradieren ("Radiergummi")
- (3) Den Punkt P' auf der Kreissehne $[A'B']$ so bestimmen:
 - Den Hilfskreis h_2 um M durch P zeichnen ("Kreis aus Kreismittelpunkt und Kreispunkt")
 - Kreis h_2 und Sehne $[A'B']$ schneiden ("Schnitt"), einen der Schnittpunkte P' nennen.
 - Den Hilfskreis h_2 und den zweiten Schnittpunkt von h_2 und $[A'B']$ ausradieren ("Radiergummi")
- (4) Die eine Lösungs-Sehne so konstruieren:

- Einen zum Winkel $P'MP$ gleichgroßen Winkel UVW zeichnen (*Makro Winkelübertragung*), dann einen Punkt W auf den freien Schenkel legen, Strecke $[VW]$ zeichnen, den freien Schenkel ausradieren
- Die Gerade g' durch die Punkte A' und B' legen (*"Gerade durch 2 Punkte"*)
- Die Gerade g' um M mit dem Winkel UVW drehen (*Makro Drehen-Gerade*), die Bildgerade g_1 nennen
- Gerade g_1 und Kreis k schneiden, die Schnittpunkte mit A_1 und B_1 bezeichnen
- Strecke $[A_1B_1]$ zeichnen (*"Strecke"*), sie ist die eine Lösungs-Sehne.
- Gerade g' ausradieren (*"Radiergummi"*)

(5) Die andere Lösungs-Sehne so konstruieren:

- Die Gerade MP zeichnen (*"Gerade durch 2 Punkte"*)
- Die Gerade g_1 an der Geraden MP spiegeln (*Makro Geradenspiegeln*), die Bildgerade g_2 nennen
- Gerade g_2 und Kreis k schneiden (*"Schnitt"*), die Schnittpunkte A_2 und B_2 nennen
- Die Strecke $[A_2B_2]$ zeichnen (*"Strecke"*), sie ist die andere Lösungs-Sehne.
- Geraden MP , g_1 und g_2 ausradieren (*"Radiergummi"*).

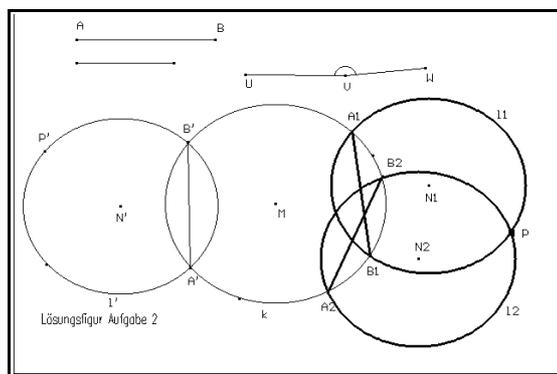


Zur **Fallunterscheidung** variieren wir die Parameter "Streckenlänge s " und "Punkt P ". Dabei stellen wir fest (den Kreisdurchmesser nennen wir d):

- Ist $P=M$, so gibt es für $s=d$ beliebig viele Lösungs-Sehnen
für $s < d$ keine Lösungs-Sehnen.
- Ist $P \perp M$, so gibt es für $s=d$ genau 1 Lösungssehne, nämlich den Durchmesser durch P ,
für $s < d$ genau 2, 1 oder keine Lösungs-Sehne je nachdem, ob der Hilfskreis l_2 die Sehne $[A'B']$ schneidet, berührt oder meidet.

Die zweite Aufgabe: Gegeben sind ein Kreis k und ein Punkt P im Außengebiet des Kreises, außerdem eine Strecke der Länge r und eine Strecke $[AB]$ der Länge s . Gesucht sind alle Kreise mit dem Radius r , die mit k eine gemeinsame Sehne der Länge s haben und durch P gehen.

Die Lösungsstrategie ist dieselbe wie bei der ersten Aufgabe: Zuerst eine beliebige Sehne $[A'B']$ der Länge s in den Kreis k einzeichnen und zu dieser Sehne einen Kreis l' mit dem Radius r konstruieren. Auf diesem Kreis einen dem Punkt P entsprechenden Punkt P' fixieren und den Kreis um M so drehen, daß der Bildkreis l_1



durch P geht. Die Schnittpunkte von k und l_1 sind die Endpunkte der Sehne $[A_1B_1]$. Die zweite Lösungsfigur findet man durch Spiegeln an der Symmetrieachse MP . Auch hier sollte man daran denken, jede Hilfslinie nach Gebrauch sofort wieder auszuradieren, damit die Übersicht gewahrt bleibt.